UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ

ELIFERIE ROGAI

CULEGERE DE PROBLEME DE MECANICĂ

PENTRU STUDENȚII DE LA SECȚIA MATEMATICĂ-FIZICĂ

BUCUREȘTI
– 1987 –

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITARĂ
București
Cota III 462557
Inventar 726570

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI
FACULTATEA DE MATEMATICA

Eliferie Rogai

CULEGERE DE PROBLEME DE MECANICA
pentru studenţii de la secţia matematică-fizică

35631

BUCUREŞTI
- 1987 -

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

I 33665

III 075-8/275

Biblioteca Centrală Universitară
BUCUREŞTI
Cota 075-8/1075
Inventar 726570

III 462 557

Prezenta lucrarea, conţinînd probleme de mecanică raţională, este destinată în special studenţilor din anul III de la Secţia Matematică-fizică, dar ea cuprinde probleme care ilustrează şi cursurile de mecanică predate studenţilor din Facultatea de matematică din anii II de la cursurile de zi, fără frecvenţă sau serale.

Textul a fost analizat în colectivul de catedră care s-a declarat de acord cu multiplicarea lui în actuala redactare, a fost avizat şi aprobat de conducerea Facultăţii de Matematică şi a Universităţii din Bucureşti.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Părinţilor mei:

Macarie Rogai

şi

Teodosia Ciobanu

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

PREFATA

"Culegerea de probleme de mecanică" este scrisă pentru studenţii anului III ai secţiei de matematică-fizică, de trei ani, din cadrul Facultăţii de matematică. Ea caută să ilustreze cele mai importante teoreme şi rezultate ale cursului de mecanică predat de conf. Simona Popp, în cadrul obiectului de studiu intitulat "Mecanică raţională şi Astronomie".

Lucrarea conţine probleme din domeniile Staticii (algebră vectorială, sisteme de vectori, centre de greutate, probleme de echilibru), al Cinematicii (cinematica punctului material) şi al Dinamicii (mişcarea unui punct material sub acţiunea greutăţii, a unei forţe de atracţie universală, a unei forţe centrale în general, a unei forţe elastice, dinamica unor sisteme de puncte materiale), precum şi o Anexă matematică, o listă cu unele notaţii, prescurtări şi unităţi de măsură, o listă cu unele constante fizice utile şi bibliografia folosită.

Fiecare capitol e divizat în paragrafe, iar fiecare paragraf începe, de regulă, cu un rezumat teoretic, fiind urmat de numeroase probleme şi de rezolvările acestora.

In elaborarea acestei cărţi am folosit notele de la excelentul curs ţinut de conf. Simona Popp, precum şi numeroasele tratate şi culegeri de probleme de mecanică publicate de-a lungul anilor în patria noastră.

Acolo unde am considerat că este cazul, am făcut trimiteri mai amănunţite la bibliografie.

Marea majoritate a problemelor prezentate în Culegere reprezintă teme ale seminarului de mecanică pe care l-am ţinut mai mulţi ani la rînd cu studenţii din ultimul an al secţiei Matematică-fizică din facultatea noastră.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Imi exprim gratitudinea mea expresă faţă de colegii din Catedră, conf. Simona Popp şi lector Liviu Nicolescu care cu amabilitatea recunoscută au citit manuscrisul şi mi-au făcut propuneri de îmbunătăţire a textului iniţial.

Rămîn îndatorat faţă de toţi aceia care prin observările şi sugestiile pe care mi le vor face îmi vor da posibilitatea să îmbunătăţesc prezenta lucrare.

Autorul

3 mai 1986

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

CUPRINS

PARTEA I: STATICA

Capitolul I. Algebră vectorială 11

§.1.1. Operaţii cu vectorii 11
1.1.1. Rezumat teoretic 11
1.1.2. Exerciţii 19
1.1.3. Rezolvarea exerciţiilor 25

§.1.2. Produsul scalar a doi vectori 38
1.2.1. Rezumat teoretic 38
1.2.2. Exerciţii 39
1.2.3. Rezolvarea exerciţiilor 45

§.1.3. Produsul vectorial a doi vectori 39
1.3.1. Rezumat teoretic 59
1.3.2. Exerciţii 61
1.3.3. Rezolvarea exerciţiilor 63

§.1.4. Produsul mixt a trei vectori 69
1.4.1. Rezumat teoretic 69
1.4.2. Exerciţii 7o
1.4.3. Rezolvarea exerciţiilor 73

§.1.5. Momentul unui vector în raport cu un punct sau cu o axă 79
1.5.1. Rezumat teoretic 79
1.5.2. Exerciţii 81
1.5.3. Rezolvarea exerciţiilor 82

§.1.6. Dublul produs vectorial 87
1.6.1. Rezumat teoretic 87
1.6.2. Exerciţii 87
1.6.3. Rezolvarea exerciţiilor 88

§.1.7. Ecuaţii vectoriale 9o
1.7.1. Exerciţii 9o
1.7.2. Rezolvarea exerciţiilor 91

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Capitolul II. Sisteme de vectori 99
§. 2.1. Sisteme de vectori legaţi sau alunecători 99
2.1.1. Rezumat teoretic 99
2.1.2. Probleme 1o4
2.1.3. Rezolvarea problemelor 112
§. 2.2. Centre de greutate 126
2.2.1. Rezumat teoretic 126
2.2.2. Probleme 132
2.2.3. Rezolvarea problemelor 14o
§. 2.3. Echilibrul punctului material şi al rigidului 167
2.3.1. Rezumat teoretic 167
2.3.2. Probleme 172
2.3.3. Rezolvarea problemelor 181

PARTEA II: CINEMATICA

Capitolul III. Cinematica punctului material 2o7
§. 3.1. Analiză vectorială 2o7
3.1.1. Rezumat teoretic 2o7
3.1.2. Probleme 2o8
3.1.2. Rezolvarea problemelor 2o9
§. 3.2. Mişcări rectilinii 212
3.2.1. Rezumat teoretic 212
3.2.2. Probleme 213
3.2.3. Rezolvarea problemelor 214
§. 3.3. Mişcări în plan 221
3.3.1. Rezumat teoretic 221
3.3.2. Probleme 222
3.3.3. Rezolvarea problemelor 225
§. 3.4. Mişcări circulare 237
3.4.1. Rezumat teoretic 237
3.4.2. Probleme 238
3.4.3. Rezolvarea problemelor 24o
§. 3.5. Mişcări în spaţiu 243
3.5.1. Rezumat teoretic 243
3.5.2. Probleme 247
3.5.3. Rezolvarea problemelor 249
§. 3.6. Hodografe 255
3.6.1. Rezumat teoretic 255

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3.6.2. Probleme 256
3.6.3. Rezolvarea problemelor 257

PARTEA A III-A: DINAMICA

Capitolul IV. Dinamica punctului material 265

§.4.1. Principiile mecanicii 265

§.4.2. Teoreme generale în dinamica punctului material 266

§.4.3. Teoreme generale în dinamica sistemelor de puncte materiale 266

§.4.4. Mişcarea unui punct material sub acţiunea unor forţe nule, constante, care depind numai de timp, poziţie, viteză sau sub acţiunea greutăţii în vid 268
4.4.1. Rezumat teoretic 268
4.4.2. Probleme 270
4.4.3. Rezolvarea problemelor 288

§.4.5. Pendulul matematic 336
4.5.1. Rezumat teoretic 336
4.5.2. Probleme 337
4.5.3. Rezolvarea problemelor 339

§.4.6. Mişcarea unui punct material sub acţiunea unei forţe de atracţie universală $\vec{F} = -f \cdot \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ 346
4.6.1. Rezumat teoretic 346
4.6.2. Probleme 347
4.6.3. Rezolvarea problemelor 349

§.4.7. Mişcarea unui punct material sub acţiunea unei forţe centrale $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{\rho}$, $\vec{\rho} = \vec{r}/r$ 355
4.7.1. Rezumat teoretic 355
4.7.2. Probleme 356
4.7.3. Rezolvarea problemelor 357

§.4.8. Mişcarea unui punct material sub acţiunea unei forţe elastice $\vec{F} = -k\vec{r}$. 363
4.8.1. Rezumat teoretic 363
4.8.2. Probleme 364
4.8.3. Rezolvarea problemelor 365

§.4.9. Dinamica unor sisteme de puncte materiale 371
4.9.1. Probleme 371
4.9.2. Rezolvarea problemelor 372

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

§.4.lo. Dinamica unor puncte materiale supuse la legături 380

4.lo.1. Probleme 381

4.lo.2. Rezolvarea problemelor 382

Anexă matematică 386

Notaţii, prescurtări, unităţi de măsură 396

Constante fizice utile 398

Bibliografie 399

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

PARTEA I: STATICA

CAPITOLUL I

ALGEBRA VECTORIALA

§.1.1. Operatii cu vectorii

1.1.1. Rezumat teoretic

1.1.1.1. Segmente orientate în $\mathbb{R}^n$ (n = 1,2,3)

Definiţii 1. Fie A şi B două puncte din $\mathbb{R}^n$. Se numeşte segment orientat şi se notează $\overrightarrow{AB}$ perechea ordonată de puncte (A,B).

Punctul A se numeşte originea segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$, B extremitatea lui $\overrightarrow{AB}$, dreapta determinată de cele două puncte A şi B suportul lui $\overrightarrow{AB}$ sau dreapta-suport a lui $\overrightarrow{AB}$, iar sensul lui $\overrightarrow{AB}$ este de la A la B.

Grafic, $\overrightarrow{AB}$ se reprezintă printr-o săgeată cu originea în A şi cu vîrful în B.

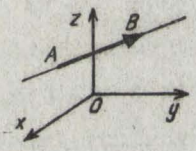


Fig.1.1.

Observaţie. Segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ este un element al "pătratului" spaţiului $\mathbb{R}^n$, adică a lui $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

2. Segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ pentru care B = A se numeşte segmentul nul $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. Uneori, cînd este exclusă orice confuzie, în loc de $\overrightarrow{0}$, scriem, pentru simplitate, 0.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3. Lungimea segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ este, prin definiţie, egală cu lungimea segmentului de dreaptă determinat de punctele A şi B şi o notăm AB, $|\overrightarrow{AB}|$, $\|AB\|$.

4. Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ au aceeaşi lungime dacă lungimile segmentelor determinate de A şi B, respectiv A' şi B' sînt egale, ie dacă AB = A'B'.

5. Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ se numesc egale dacă A = A' şi B = B', respectiv opuse dacă A = B' şi B = A'. In primul caz scriem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, iar în al doilea $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$.

6. Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ se numesc paralele dacă dreptele determinate de A şi B, respectiv A' şi B' sînt paralele.

7. Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ se numesc coliniare dacă ele au aceeaşi dreaptă-suport.

8. Două segmente orientate ne nule $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ au aceeaşi direcţie, dacă dreptele lor suport sînt paralele sau coincid.

9. Două segmente paralele $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au acelaşi sens, dacă punctele B şi D se află într-un acelaşi semiplan mărginit de dreapta AC.

lo. Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ au aceeaşi orientare dacă au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens.

11. Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ se numesc echipolente dacă au aceeaşi orientare şi aceeaşi lungime.

12. Teoremă. Relaţia de echipolenţă pe mulţimea segmentelor orientate din $\mathbb{R}^n$ este o relaţie de echivalenţă.

1.1.1.2. Vectori în $\mathbb{R}^n$ (n = 1,2,3). Definiţii

1.1.1.2.1. Vectori liberi

1. Definiţie. Se numeşte vector liber în $\mathbb{R}^n$ orice clasă de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate din $\mathbb{R}^n$, ie., orice mulţime de segmente orientate din $\mathbb{R}^n$, care au aceeaşi orientare şi aceeaşi lungime.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Un vector liber e reprezentat prin oricare segment orientat din clasa de echivalenţă respectivă, şi, pentru simplicitate, se notează $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, ... etc.

Un exemplu de vector liber este momentul unui cuplu, adică al unui sistem de vectori cu suporturile paralele şi distincte de forma $(\vec{v}, -\vec{v})$.

1.1.1.2.2. Vectori alunecători sau glisanţi

1. Definiţie. Se numeşte vector glisant price clasă de echivalenţă determinată de relaţia de echipolenţă pe mulţimea segmentelor orientate din $\mathbb{R}^n$, aşezate pe o aceeaşi dreaptă, ie o mulţime de segmente orientate din $\mathbb{R}^n$, situate pe o aceeaşi dreaptă, segmente care au acelaşi sens şi aceeaşi lungime.

Exemple de vectori alunecători: vectorul de rotaţie $\vec{\omega}$ al unui solid care se roteşte în jurul unei axe, forţele aplicate unui sistem rigid de puncte materiale.

1.1.1.2.3. Vectori legaţi

1. Definiţie. Se numeşte vector legat orice segment orientat $\overrightarrow{AB}$, cu originea fixată în A şi cu extremitatea în alt punct al spaţiului, de pildă, B.

Exemple de vectori legaţi: viteza $\vec{v}$ a unui mobil într-un punct al traiectoriei sale, intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$ generat de o sarcină electrică punctuală în $\mathbb{R}^3$.

2. Observaţie. In cele ce urmează vom "identifica" un vector (liber sau alunecător) cu un reprezentant oarecare al clasei respective de echivalenţă.

Astfel cînd vom scrie vectorul $\overrightarrow{AB}$ nu ne vom gîndi la clasa lui de echivalenţă, aşa după cum atunci cînd scriem numărul natural 5 nu ne gîndim la "toate" mulţimile concrete cu cîte 5 elemente.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

1.1.1.3. Alte definiţii privind vectorii

Pe baza observaţiei precedente, ca şi pentru segmentele orientate, şi pentru vectori vom defini conceptele de

1. Vector nul. Se numeşte vector nul orice segment orientat $\overrightarrow{AA}$. El se notează $\overrightarrow{0}$ sau 0.

2. Vectori unitate sau versori. Se numeşte vector unitate sau versor orice vector $\overrightarrow{AB}$ de lungimea unu, ie AB = 1. Se notează $\vec{n}$, $\vec{s}$, $\vec{u}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{\varepsilon}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\rho}$ etc. In plan versorii axelor Ox şi Oy îi vom nota cu $\vec{i}$ şi $\vec{j}$, iar în spaţiu versorii celor trei axe ale reperului ortogonal îi vom nota cu $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Vectori coliniari. Doi vectori $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ se numesc coliniari dacă $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ au aceeaşi direcţie. Scriem $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{A'B'}$, $m \in \mathbb{R}$.

4. Vectori opuşi. Doi vectori $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ se numesc opuşi dacă ei au aceeaşi lungime şi orientări contrare, Scriem $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.

5. Vectori egali sau echipolenţi. Doi vectori $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ se numesc egali dacă segmentele orientate reprezentative corespunzătoare sînt segmente echipolente. Aceasta se scrie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Egalitatea vectorilor are proprietăţile de reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate.

6. Vectori de poziţie. Fie un reper în $\mathbb{R}^3$ de origine O şi $P \in \mathbb{R}^3$ un punct. Se numeşte vector de poziţie al punctului P faţă de punctul O segmentul orientat $\overrightarrow{OP}$. Se mai notează $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. In plan $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$, iar pe o dreaptă $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i}$.

7. Teoremă. Mulţimea vectorilor liberi din $\mathbb{R}^n$ este izomorfă cu mulţimea vectorilor legaţi, cu originea în punctul O, unde O e, de pildă, originea unui reper din acest spaţiu.

8. Axă. Fie o dreaptă dată d, un punct $O \in d$ şi un versor $\vec{u}$ aşternut pe d cu originea în O. Tripletul (d, O, $\vec{u}$) îl numim axă.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

1.1.1.4. Mărimi scalare și mărimi vectoriale în mecanică

1. Mărimi scalare. In mecanică, fizică, chimie există mărimi care pot fi descrise, ie pot fi caracterizate, determinate, numai cu ajutorul unui singur număr (al unui scalar, al măsurii unei astfel de mărimi) și a unei unități de măsură.

Asemenea mărimi sînt: durata unei oscilații, temperatura aerului dintr-o incintă, sarcina electrică purtată de o particulă, masa unui corp.

Aceste mărimi se numesc mărimi scalare.

2. Mărimi vectoriale. Spre deosebire de mărimile scalare, există în mecanică, fizică, chimie și mărimi, așa cum sînt de pildă forțele, vitezele, accelerațiile, care nu pot fi descrise cu ajutprul unui singur număr, ci cu ajutorul a mai multor numere, cu ajutorul unor vectori.

Mărimile de acest tip se numesc mărimi vectoriale.

Există însă și o altă clasă de mărimi cu o structură și mai complexă decît cea a mărimilor scalare și vectoriale. Acestea pot fi descrise numai cu ajutorul unor entități matematice numite tensori, ele însele luînd numele de mărimi tensoriale.

Exemple de mărimi exprimate cu ajutorul tensorilor sînt: momentele de inerție ale unui solid față de axele reperului Oxyz, viteza unghiulară de rotație a unui corp în spațiu.

3. Observație importantă. Mărimile fizice și mecanice care au caracter vectorial, însoțite de unități de măsură adecvate pentru exprimarea modulelor și proiecțiilor lor pe axe, vor fi reprezentate grafic prin vectori (liberi, glisanți sau legați) în spațiile $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$.

De aceea vom identifica mărimile vectoriale cu segmente orientate, cu vectori, din $\mathbb{R}^n$, la scări potrivite.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

4. Caracterizarea unei mărimi vectoriale exprimate printr-un vector $\overrightarrow{AB}$: In cele ce urmează vom spune că un vector $\overrightarrow{AB}$, care exprimă o anumită mărime vectorială, este determinat dacă pentru el cunoaştem următoarele elemente:

1. Punctul de aplicaţie sau originea sa A.

2. Suportul său, care este dreapta definită de punctele A şi B.

3. Sensul său (dat de perechea de puncte orientată (A,B)) de la A la B.

4. Modulul, mărimea sau intensitatea sa notată AB.

1.1.1.5. Operaţii cu vectorii liberi din $\mathbb{R}^n$

In cele ce urmează vom considera mulţimea V a vectorilor liberi din spaţiul $\mathbb{R}^n$ raportat la un reper de origine O. De multe ori fiecărui vector liber $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, ... din $\mathbb{R}^3$ îi vom asocia vectorul legat $\overrightarrow{OM}$ sau $\vec{a}$ egal cu $\overrightarrow{AB}$, vectorul $\overrightarrow{ON}$ sau $\vec{b}$ egal cu $\overrightarrow{CD}$,... etc.

Extinzînd principiul compunerii forţelor după legea paralelogramului, a poligonului, a paralelipipedului ... şi (consecinţa acestui) înmulţirea forţelor cu numere reale (scalari) din $\mathbb{R}$, definim pe V (= mulţimea vectorilor liberi din $\mathbb{R}^n$) următoarele operaţii:

1. Adunarea vectorilor. Fie $\vec{a},\vec{b} \in V$ doi vectori. Se numeşte suma vectorială a lui $\vec{a}$ cu $\vec{b}$ vectorul $\vec{c}$ egal cu diagonala paralelogramului construit pe $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ drept laturi, pentru care scriem $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (vedeţi figura).

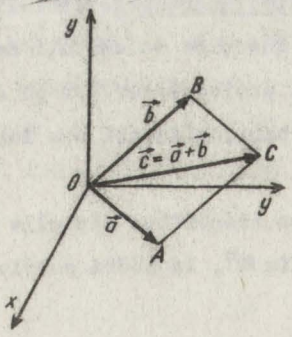


Fig.1.2.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2. Teoremă. Adunarea vectorilor liberi din V are proprietăţile:

α) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ (comutativitatea)

β) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ (asociativitate)

γ) $\exists \vec{0} \in V$ astfel încît $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a} \in V$

δ) $\forall \vec{a} \in V$, $\exists \vec{a}' \in V$, astfel încît $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$.

Vectorul $\vec{a}'$ se numeşte opusul lui $\vec{a}$ şi se notează $\vec{a}' = -\vec{a}$.

Observaţie. Această teoremă ne arată că (V, +) e un grup aditiv abelian.

3. Scăderea vectorilor. Fie $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Se numeşte diferenţa vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, vectorul $\vec{a} + (-\vec{b})$ pe care-l notăm cu $\vec{d}$ şi pe care-l mai scriem $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ($\vec{d}$ coincide cu cea de a doua diagonală a paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (vedeţi figura)).

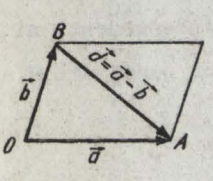


Fig.1.3.

Observaţie. Egalitatea $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ se mai scrie $\vec{a} = \vec{d} + \vec{b}$.

4. Inmulţirea (amplificarea) vectorilor cu numere (scalari) din R. Fie $\vec{a}$ un vector din V şi $\lambda \in \mathbb{R}$ un număr real dat (i.e. un scalar). Prin produsul $\lambda \cdot \vec{a}$ dintre scalarul λ şi vectorul $\vec{a}$ înţelegem un vector din V de modul $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, care are sensul lui $\vec{a}$ pentru $\lambda > 0$ şi sensul contrar lui $\vec{a}$ pentru $\lambda < 0$. Dacă $\lambda = 0$ sau $\vec{a} = \vec{0}$, atunci $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

5. Teoremă. Inmulţirea vectorilor liberi din V cu numere reale din R are proprietăţile:

α) $\lambda(\mu \cdot \vec{a}) = \mu(\lambda \cdot \vec{a}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{a}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ şi $\forall \vec{a} \in V$.

β) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ şi $\forall \vec{a} \in V$.

γ) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ şi $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ (teorema lui Thales)

δ) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $\forall \vec{a} \in V$.

6. Observaţie. Proprietăţile date la punctul 2 şi 5 exprimă faptul că (V, +, .) este un spaţiu liniar (sau vectorial) peste $\mathbb{R}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

7. Dependența și independența liniară a vectorilor

Spunem că vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \ldots \quad \vec{\ell} \in V$ sînt liniar dependenți dacă există scalarii $\alpha, \beta, \ldots, \lambda \in \mathbb{R}$, nu toți nuli, astfel încît

(1) $$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \ldots + \lambda\vec{\ell} = \vec{0}$$

Spunem că vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{\ell} \in V$ sînt liniar independenți dacă egalitatea (1) implică $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0$.

Propoziție. Doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b} \in V$ sînt liniar dependenți dacă și numai dacă ei sînt coliniari.

Teoremă. Orice 4 vectori din $\mathbb{R}^3$, 3 vectori din $\mathbb{R}^2$ și 2 vectori din $\mathbb{R}$ sînt liniar dependenți.

8. Dimensiune. Bază. Numim dimensiune a lui V numărul maxim de vectori liniar independenți ai acestuia, în speță 3 (pentru n = 3), 2 (pentru n = 2) și 1 (pentru n = 1).

Numim bază a lui V orice 3 vectori liniar independenți ai lui $\mathbb{R}^3$, 2 vectori liniar independenți ai lui $\mathbb{R}^2$ și 1 vector nenul din $\mathbb{R}$.

9. Proiecțiile sau coordonatele unui vector

Dacă $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $(O, \vec{a}, \vec{b})$, $(O, \vec{a})$ sînt repere în $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ și $\mathbb{R}$, atunci orice vector $\vec{u}$ al acestor spații se poate scrie astfel:

$$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \quad \text{sau}$$

(1) $$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \quad \text{sau}$$

$$\vec{u} = \alpha\vec{a},$$

numerele (α, β, γ), (α, β) respectiv (α) purtînd numele de proiecțiile acelui vector în reperele respective, iar expresiile (1) ale lui $\vec{u}$ numindu-se forme analitice ale vectorului respectiv.

Cel mai des considerăm un reper ortogonal Oxyz cu versorii $\vec{i}$ = versor Ox, $\vec{j}$ = versor Oy, $\vec{k}$ = versor Oz.

Vectorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ constituie baza naturală a lui $\mathbb{R}^3$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Dacă $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ este un punct, atunci vectorul de poziţie al lui P este:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

De asemenea vom mai scrie $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, unde a_x e proiecţia lui $\vec{a}$ pe Ox, a_y este proiecţia lui $\vec{a}$ pe Oy şi a_z e proiecţia lui $\vec{a}$ pe Oz.

In $\mathbb{R}^2$ vom considera reperul ortogonal xOy cu versorii $\vec{i}$ = versor Ox şi $\vec{j}$ = versor Oy, cînd scriem

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Pe R vom considera reperul Ox cu versorul $\vec{i}$ = versor Ox, cînd scriem $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i}$.

1o. Efectuarea operaţiilor fundamentale cu vectorii scrişi sub formă analitică de pildă $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ se bazează pe următoarele proprietăţi:

1) $\vec{a} = \vec{b} \iff a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z$

2) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k},\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V.$

3) Dacă avem punctele $A(x_A, y_A, z_A)$ şi $B(x_B, y_B, z_B)$ din $\mathbb{R}^3$, atunci

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

4) $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ şi $\vec{a} \in V$.

1.1.2. Exerciţii

1. 1) Fie forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ reprezentate prin segmentele orientate $\overrightarrow{A_1B_1}$ şi $\overrightarrow{A_2B_2}$, iar A şi B mijloacele segmentelor A_1A_2 şi B_1B_2.

Demonstraţi că rezultanta celor două forţe este

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 2\,\overrightarrow{AB}.$$

2) Fie triunghiul ABC şi M un punct pe latura BC. Atunci avem $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

3) Fie ABC un triunghi oarecare, A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA şi AB ale triunghiului şi O un punct oarecare din planul

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

triunghiului. Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ au aceeaşi rezultantă ca şi vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

2. 1) Să se demonstreze că dacă într-un patrulater convex diagonalele se înjumătăţesc, atunci acel patrulater convex este un paralelogram.

2) Fie un paralelogram ABCD, O centrul lui de simetrie şi $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Să se exprime $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ în funcţie de $\vec{a}$ şi de $\vec{b}$.

3) Vîrfurile A, B, C ale unui paralelogra, ABCD au vectorii de poziţie $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, faţă de un reper.

Să se determine vectorul de poziţie $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ al punctului D în funcţie de $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$.

3. 1) Latura BC a unui triunghi ABC se împarte în 6 părţi egale prin punctele D_1, D_2, D_3, D_4, D_5. Să se afle expresiile vectorilor $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3A}$, $\overrightarrow{D_4A}$ şi $\overrightarrow{D_5A}$ în funcţie de vectorii $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$ şi $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$.

2) Fie un cerc (O) de rază R şi centru O. Fie ABCDEF vîrfurile unui hexagon regulat înscris în cerc. Să se calculeze suma vectorilor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.

3) Fie AB şi CD două coarde perpendiculare într-un cerc de centru O şi I punctul de intersecţie a coardelor. Atunci avem

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2 \cdot \overrightarrow{IO} \tag{1}$$

(Tullio Levi-Civita şi Ugo Arnaldi, Curs de mecanică teoretică, vol.I.)

4. 1) In orice triunghi echilateral ABC, înscris în cercul (O), avem relaţia:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AO}.$$

2) Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi şi M_1, M_2, M_3 mijloacele laturilor A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 şi avînd vectorii de poziţie

$$\vec{m}_1 = -2\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{m}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{m}_3 = 4\vec{i} - \vec{j}.$$

Se cer vectorii de poziţie ai vîrfurilor acestui triunghi.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

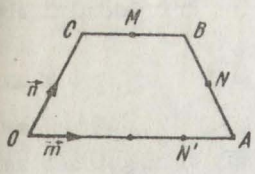


Fig. 1.4.

3) Fie trapezul isoscel din figură cu $OA = 4$, $AB = 2$, $BC = 2$, $\vec{m}$ = vers $\overrightarrow{OA}$ și $\vec{n}$ = vers $\overrightarrow{OC}$. Să se exprime $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{AB}$ în funcție de versorii $\vec{m}$ și $\vec{n}$.

5. 1) Dacă vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ și $\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$ au originea într-un același punct $O \in R^2$, atunci ultimul vector, i.e. $\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$, bisectează unghiul format de primii doi.

2) Fie un triunghi ABC, ale cărui laturi AB și AC se împart fiecare, în cîte n părți egale, prin punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ și $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-1}$.

Să se calculeze suma $\vec{S} = \sum_{i=1}^{n-1} \overrightarrow{A_i A'_i}$ în funcție de $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$.

3) Fie pătratul ABCD raportat la reperul xOy din R^2 și E punctul de intersecție al diagonalelor pătratului. Să se arate că

$$m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} + n\overrightarrow{OD} = 2(m+n)\overrightarrow{OE},\ m,n \in R_+^*.$$

6. 1) Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ patru vectori din R^3, cu originea comună O, iar A, B, C, D extremitățile lor. Dacă $\vec{b}-\vec{a} = \vec{c}-\vec{d}$, atunci patrulaterul ABCD este paralelogram și reciproc.

2) Fie ABCD un paralelogram. Pe latura AB luăm punctul N, a.î. $\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AB}}{n}$, iar pe diagonala AC luăm punctul M, a.î. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC}}{n+1}$. Arătați că punctele D, M, N sînt coliniare.

3) Să se arate că diagonalele unui paralelogram se înjumătățesc.

7. 1) Să se arate că dacă trei forțe acționează asupra unui punct și acesta rămîne în echilibru, atunci aceste forțe sînt dirijate după medianele triunghiului determinat de extremitățile forțelor.

2) Dacă vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt vectori coliniari, atunci $\vec{a}+\vec{b}$ și $\vec{a}-\vec{b}$ sînt și ei vectori coliniari și recirpoc.

3) Fie $\vec{a} = (-4, 2)$, $\vec{b} = (2,1)$, $\vec{c} = (2, -3)$ trei vectori din R^2. Să se arate că cu ajutorul lor se poate construi un triunghi.

Cda. 236/987 Fasc. 2

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

8. 1) α) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, considerat ca o placă omogenă*) atunci avem

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0.$$

β) Să se demonstreze că cu medianele unui triunghi dat se poate construi un triunghi.

2) Fie ABC un triunghi oarecare, AA', BB' două mediane ale lui şi G punctul lor de intersecţie, adică centrul de greutate al triunghiului, considerat ca o placă plană omogenă de aceeaşi grosime.

Să se calculeze rapoartele:

$$\lambda = \frac{AG}{GA'} \quad \text{şi} \quad \mu = \frac{BG}{GB'},$$

3) Fie $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ trei puncte date. Să se afle mulţimea punctelor $X \in \mathbb{R}^3$ pentru care avem $3\overrightarrow{XA} = 2\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$.

9. 1) Fie ABCD un patrulater convex. Fie E şi F mijloacele diagonalelor AC şi DB. Să se arate că dacă:

(1) $\alpha\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, atunci patrulaterul ABCD e un paralelogram.

2) O condiţie necesară şi suficientă ca punctele $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^3$, de vectori de poziţie $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, să fie coliniare este ca să existe relaţiile

(1) $$\lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2 + \lambda_3\vec{r}_3 = \vec{0}$$

(2) $$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad |\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0$$

3) Pe laturile unui triunghi oarecare ABC se construiesc în planul triunghiului paralelogramele arbitrare ABML, BCPN, ACQR. Să se arate că cu vectorii $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ şi $\overrightarrow{RL}$ se poate construi un triunghi.

10. 1) Fie A_1, A_2, A_3, A_4 patru puncte din $\mathbb{R}^3$, de vectori de poziţie $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$. O condiţie necesară şi suficientă ca punctele

---

*) Vedeţi §2.2.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

acestea să fie coplanare este ca să existe relaţiile:

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \vec{r}_i = \vec{0}, \qquad (2)\quad \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 0,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \neq 0$$

2) Fiind daţi vectorii oarecare $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ să se arate că vectorii:

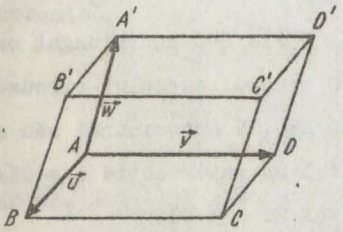


Fig.1.5.

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - 2\vec{v}_1$$
$$\vec{u}_2 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$$
$$\vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3$$

sînt coplanari.

3) Fie paralelipipedul ABCDA'B'C'D' şi vectorii $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AD} = \vec{v}$, $\vec{AA'} = \vec{w}$.

α) Să se exprime vectorii $\vec{AC}$, $\vec{BD}$, $\vec{D'B'}$, $\vec{AC'}$, $\vec{B'D}$, $\vec{DA'}$, $\vec{CA'}$ cu ajutorul vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

β) Să se arate că vectorii $\vec{AA'}$, $\vec{DB'}$ şi $\vec{BD}$ sînt coplanari.

11. 1) Fie vectorii $\vec{m} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}$.

$$\vec{n} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}$$
$$\vec{p} = 5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

şi $\vec{a} = 4\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p}$.

Să se afle proiecţiile lui $\vec{a}$ pe axele de coordonate.

2) Să se determine vectorul de poziţie $\vec{r}$ al punctului $M \in \mathbb{R}^3$ care împarte segmentul M_1M_2 în raportul λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq -1$.

3) Fie triunghiul ABC şi $D \in AB$, astfel încît $\frac{AD}{DB} = \frac{7}{9}$. Să se exprime vectorul $\vec{CD}$ cu ajutorul vectorilor $\vec{CA}$ şi $\vec{CB}$.

12. 1) Fie SABCD o piramidă cu baza un paralelogram şi I punctul de intersecţie a diagonalelor bazei ABCD. Demonstraţia că $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\,\vec{SI}$.

2) Fie triunghiul ABC în care $\vec{a} = \vec{BC}$; $\vec{b} = \vec{CA}$; $\vec{c} = \vec{AB}$ şi I este punctul de întîlnire a bisectoarelor interioare ale triunghiului.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

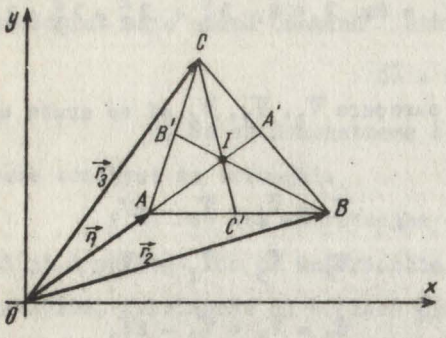


Fig.1.6.

Să se demonstreze că

α) $\overrightarrow{AI} = \dfrac{b\vec{c} - c\vec{b}}{a + b + c}$

β) $\overrightarrow{OI} = \dfrac{a\vec{r}_1 + b\vec{r}_2 + c\vec{r}_3}{a + b + c}$

unde $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{r}_3 = \overrightarrow{OC}$.

13. Fie ABC un triunghi oarecare, O centrul cercului circumscris Δ ABC, H ortocentrul său și G punctul de intersecție a medianelor (centrul lui de greutate). Demonstrați că $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$.

14. 1) Să se descompună vectorul $\vec{x} = (4,3)$ după vectorii $\vec{a} = (-1,3)$ și $\vec{b} = (2,5)$.

2) Să se descompună un vector dat $\vec{a}$, după două direcții care fac cu $\vec{a}$ unghiurile β și γ.

3) Fie hexagonul ABCDEF regulat de latură a cu centrul în O și reperul xAy din figură.

α) Să se exprime vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ și $\overrightarrow{AF}$ în funcție de $\vec{i}$, $\vec{j}$.

β) Să se arate că suma acestor vectori este egală cu $6\,\overrightarrow{AO}$.

γ) Să se descompună vectorul $\overrightarrow{AC}$ după axele determinate de versorii $\dfrac{\overrightarrow{AF}}{AF}$ și $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{AD}$.

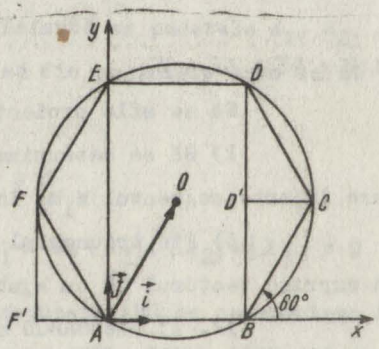


Fig.1.7.

4) Să se descompună o forță de 8 N în două componente de câte 5 N fiecare. E posibilă o descompunere a aceleiași forțe în două componente de câte 16 N, 2o N, loo N?

15. 1) In ortocentrul H al unui triunghi ABC acționează o forță $\vec{F}$, dirijată după o direcție oarecare. Să se descompună această

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

forță în trei componente paralele cu $\vec{F}$, componente care acționează în vîrfurile triunghiului.

Să se deducă relația tg A + tg B + tg C = tgA . tgB . tgC.

2) Să se descompună o forță dată $\vec{R}$ în două componente avînd același punct de aplicație cu forța $\vec{R}$, astfel încît raportul valorilor componentelor să fie $k \in \mathbb{R}_+^*$ și să se afle locul geometric descris de extremitatea primei componente.

1.1.3. Rezolvarea exercițiilor

1. 1) Avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA_1} + \vec{F}_1 + \overrightarrow{B_1B}$ și $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA_2} + \vec{F}_2 + \overrightarrow{B_2B}$. Dar $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_2} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_2B} = \vec{0}$. Prin adunare rezultă relația cerută. Deci rezultanta celor două forțe este paralelă cu dreapta AB (fig.1.8.).

2) Avem evident $(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

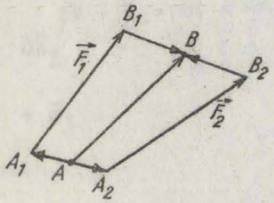


Fig.1.8.

3) Avem

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$ (vedeți figura 1. .).

2. 1) Conform enunțului $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$. De aici deducem $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$ sau $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Astfel AD și BC sînt laturi paralele și egale ale patrulaterului ABCD. Deci patrulaterul ABCD este un paralelogram.

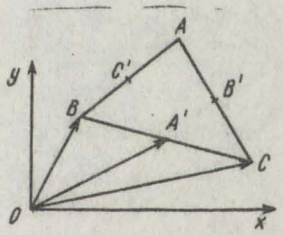


Fig.1.9.

2) Avem:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \vec{a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) - \vec{a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) - \vec{a} =$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} = \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b});$$

analog găsim:

$$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a});$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

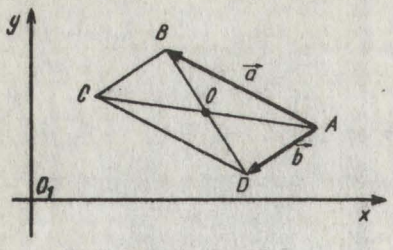


Fig.1.1o.

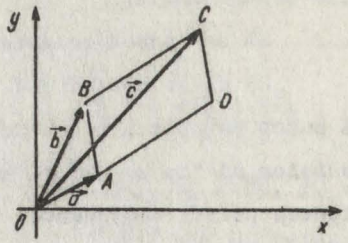


Fig.1.11.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a}) - \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$;

$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$.

3) Avem $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + b - \vec{b}$.

3. 1) Avem succesiv $\overrightarrow{D_1A} = \overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{CB}}{6} + \overrightarrow{BA} = \frac{\vec{a}}{6} + \vec{c}$;

analog găsim:

$\overrightarrow{D_2A} = \frac{2\vec{a}}{6} + \vec{c}$; $\overrightarrow{D_3A} = \frac{3\vec{a}}{6} + \vec{c}$;

$\overrightarrow{D_4A} = \frac{4\vec{a}}{6} + \vec{c}$; $\overrightarrow{D_5A} = \frac{5\vec{a}}{6} + \vec{c}$.

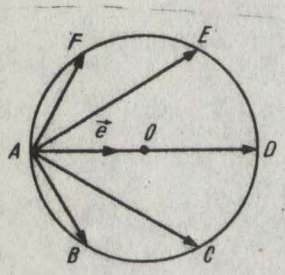


Fig.1.12.

2) Fie $\vec{e}$ = vers $\overrightarrow{AD}$. Vom avea:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO} = R\vec{e}$;

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} = 3\,R\vec{e}$;

$\overrightarrow{AD} = 2\,R\vec{e}$; deci

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\,R\vec{e}$.

3) Scriem $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA}$ şi analoagele:

$\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{ID}$.

Rezultă:

(2) $\sum \overrightarrow{IA} = 4\,\overrightarrow{IO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Dar

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\,\overrightarrow{ON}$, iar

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM}) = 2\,\overrightarrow{OI}$.

Inlocuind rezultatul acesta în (2), obţinem relaţia (1).

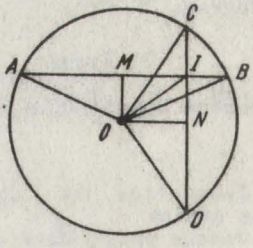


Fig.1.13.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

4. 1) Avem $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} = 2\,\vec{AA'}$ (1)

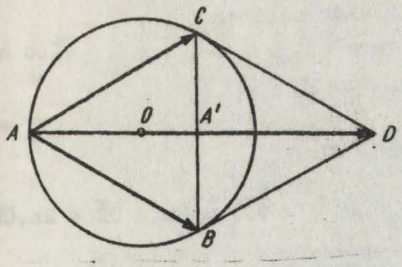


Fig.1.14.

Punctul O este și centru de greutate al triunghiului ABC considerat ca o placă omogenă; deci

$2\,\vec{OA'} = \vec{AO}$, $\vec{AA'} = 2\,\vec{OA'} = \frac{3}{2}\vec{AO}$; deci

$2\,\vec{AA'} = 3\,\vec{AO}$ (2)

Din (1) și (2) rezultă relația cerută:

$$\vec{AB} + \vec{AC} = 3\,\vec{AO}.$$

2) Avem $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} = 2\cdot\vec{OM_3}$ și analoagele $\vec{OA_2} + \vec{OA_3} = 2\cdot\vec{OM_1}$,

(1) $$\vec{OA_3} + \vec{OA_1} = 2\cdot\vec{OM_2}$$

Prin adunarea acestor trei egalități deducem

(2) $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 +$

$+ \vec{m}_3$ ($= +4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$).

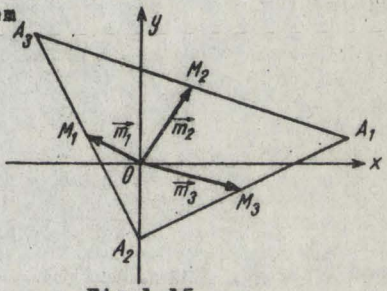


Fig.1.15.

Folosind (1) în (2), găsim

$\vec{OA_1} = +8\,\vec{i} + \vec{j}$.

Similar obținem $\vec{OA_2} = -3\,\vec{j}$ și

$\vec{OA_3} = -4\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$.

3) Avem imediat $\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC} = -\vec{OA} + \vec{OC} = -4\vec{m} + 2\vec{n}$; analog deducem $\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM} = 2\,\vec{n} + \vec{m}$; $\vec{ON} = \vec{OA} + \vec{AN} = \vec{OA} + \vec{AN'} + \vec{N'N} =$

$= 4\,\vec{m} - \vec{m} + \vec{n} = 3\vec{m} + \vec{n}$; $\vec{MN} = \vec{MO} + \vec{ON} = -\vec{OM} + 3\vec{m} + \vec{n} = -(2\vec{n}+\vec{m}) + 3\vec{m} + \vec{n} =$

$= 2\vec{m} - \vec{n}$; $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OC} + \vec{CB} = -4\vec{m} + 2\vec{n} + 2\vec{m} = -2\vec{m} + 2\vec{n}$.

5. 1) Avem $\vec{OA} = \frac{\vec{a}}{a}$ = vers $\vec{a}$ și $\vec{OB} = \frac{\vec{b}}{b}$ = vers $\vec{b}$.

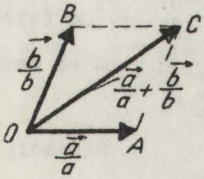


Fig.1.16.

Rezultă că $\vec{OC} = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$ și figura OACB este un romb. Deci OC este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$.

2) Din asemănarea triunghiurilor $AA_1A'_1$ și ABC găsim

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$\frac{A_1A'_1}{BC} = \frac{1}{n}$. Deci $\overrightarrow{A_1A'_1} = \frac{\vec{a}}{n}$. Analog obţinem

$$\overrightarrow{A_2A'_2} = \frac{2\vec{a}}{n}, \ldots \quad \overrightarrow{A_{n-1}A'_{n-1}} = \frac{n-1}{N}\vec{a}.$$

Acum $\vec{S} = \frac{\vec{a}}{n}(1 + 2 + \ldots + n-1) = \frac{(n-1)n\vec{a}}{2n} = \frac{n-1}{2}\vec{a}$.

3) Avem imediat: $m(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + n(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = 2m \cdot \overrightarrow{OE} + 2n \cdot \overrightarrow{OE} = 2(m+n)\overrightarrow{OE}$

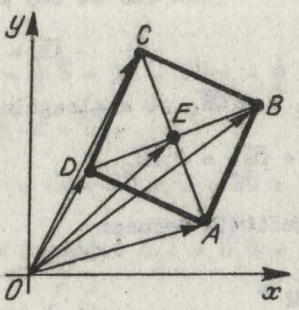


Fig.1.17.

6. 1) Avem $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$;

$$\vec{c} - \vec{d} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC}.$$

Dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, atunci latura AB este egală şi paralelă cu DC. Rezultă că patrulaterul ABCD este paralelogram. Proprietatea reciprocă este imediată.

2) Urmărind figura, putem scrie $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} =$

$$= \frac{\overrightarrow{AC}}{n+1} - \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{n+1} - \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} - n\overrightarrow{AD}}{n+1}$$

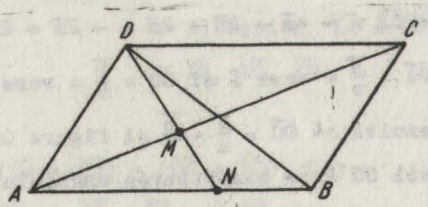


Fig.1.18.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Analog avem:

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}}{n} - \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} - n\overrightarrow{AD}}{n}$$

Din cele două relaţii de mai sus deducem:

$\overrightarrow{DM} = \frac{n}{n+1} \cdot \overrightarrow{DN}$, adică punctele N, M şi D sînt coliniare.

3) Avem (vedeţi figura)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

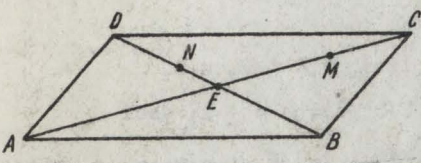


Fig.1.19.

Fie acum $M \in AC$. Avem $\overrightarrow{AM} = \lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$, $\lambda \in R$. Fie de pildă $N \in DB$. Avem

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{BD}, \quad \mu \in R.$$

Diagonalele se taie în punctul E. Atunci, dacă cerem ca să avem $N \equiv M \equiv E$, ţie. $\overrightarrow{AN} \equiv \overrightarrow{AM}$, obţinem

$$\lambda\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \mu(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}),$$

care me dă

$\lambda = 1 - \mu$ şi $\lambda = \mu$; deci $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ şi avem apoi

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{\overrightarrow{AC}}{2};$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{2} - \frac{\overrightarrow{AD}}{2} + \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}}{2} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}}{2} = \frac{\overrightarrow{DB}}{2}$$

7. 1) Fie M punctul asupra căruia acţionează forţele $\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2$ şi $\overrightarrow{F}_3$ şi care au rezultanta nulă.

Atunci cu notaţia

$$\overrightarrow{F}_1 = \overrightarrow{MA}_1, \ \overrightarrow{F}_2 = \overrightarrow{MA}_2, \ \overrightarrow{F}_3 = \overrightarrow{MA}_3 \text{ , avem}$$

$\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = \overrightarrow{MA'}_3$ respectiv

$$\overrightarrow{MA'}_3 + \overrightarrow{MA}_3 = \overrightarrow{0}.$$

Astfel suportul lui $\overrightarrow{F}_3$ trece prin mijlocul C al segmentului A_1A_2, determinat de extremităţile A_1 şi A_2 ale forţelor $\overrightarrow{F}_1$ şi $\overrightarrow{F}_2$.

Analog se arată că suporţii celorlalte două forţe trec prin mijloacele A şi B ale asegmentelor A_2A_3 şi A_3A_1.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

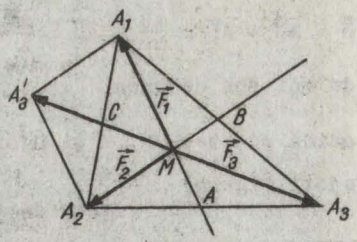


Fig.1.2o.

2) α) $\vec{a}$ coliniar cu $\vec{b}$ implică $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, a.î. $\vec{a} = \lambda \vec{b} \longrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{b}(1+\lambda)$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b}(\lambda - 1)$, $\lambda \neq \pm 1$; deci

$\vec{a} + \vec{b} = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}(\vec{a}-\vec{b})$, adică $\vec{a} + \vec{b}$ și $\vec{a} - \vec{b}$ sînt vectori coliniari.

β) Reciproc fie $\vec{a} + \vec{b}$ coliniar cu $\vec{a} - \vec{b}$; avem $\vec{a} + \vec{b} = \mu(\vec{a} - \vec{b})$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq \pm 1 \longrightarrow \vec{a}(\mu - 1) = \vec{b}(1 + \mu)$, $\vec{a} = \frac{\mu+1}{\mu-1}\vec{b}$, i.e. $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt coliniari.

3) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

8. 1) α) Avem evident:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right).$$

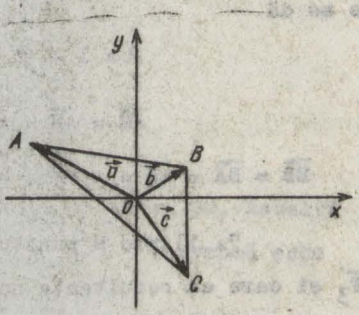


Fig.1.21.

Prin adunare rezultă

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

β) Egalitățile $2\overrightarrow{AA_1} = 3\overrightarrow{AG}$, $2\overrightarrow{BB_1} = 3\overrightarrow{BG}$, $2\overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{CG}$ împreună cu rezultatul de la pct. α) ne conduc la $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, adică la proprietatea ce se cerea s-o arătăm.

2) Vectorii $\overrightarrow{AG}$ și $\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{BG}$ și $\overrightarrow{GB'}$ sînt coliniari. Deci $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ a.î. să avem: $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{BG} = \mu \overrightarrow{GB'}$; avem apoi

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'} = (\lambda + 1)\overrightarrow{GA'}$$

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'} = (\mu + 1)\overrightarrow{GB'} \quad \text{sau}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

(1) $\begin{cases} \overrightarrow{GA'} = \dfrac{\overrightarrow{AA'}}{1+\lambda}, & 1+\lambda \neq 0; \\ \overrightarrow{GB'} = \dfrac{\overrightarrow{BB'}}{1+\mu}, & 1+\mu \neq 0. \end{cases}$

(2) Dar $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ și $\overrightarrow{BB'} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$; deci

(3) $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'G} = \vec{0}$, unde $\overrightarrow{A'B'} = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{2}$

Ținînd seama de relațiile (1) și (2) în (3), găsim:

(4) $\dfrac{1}{2(1+\lambda)}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \dfrac{\overrightarrow{BA}}{2} - \dfrac{1}{2(1+\mu)}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$

Dar $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. De aceea (4) se mai scrie

$$\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{1+\lambda} + \frac{2}{1+\mu} - 1\right) + \overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{1+\lambda} - \frac{1}{1+\mu}\right) = \vec{0}.$$

De aici deducem $\dfrac{1}{1+\lambda} = \dfrac{1}{1+\mu}$ și $\dfrac{1}{1+\lambda} + \dfrac{2}{1+\mu} = 1$, respectiv $\lambda = \mu = 2$.

3) Ecuația dată se mai scrie $3\overrightarrow{XA} = 2(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AC})$; deci

(1) $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

Astfel dacă (1) are loc, atunci X este orice punct din $\mathbb{R}^3$.

Dacă (1) nu are loc, atunci $X \in \emptyset$

9. 1) Putem scrie $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$ și

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}$

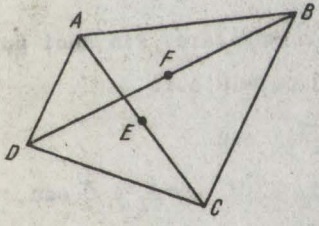


Fig.1.22.

Adunînd găsim:

(2) $2\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}) + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} +$

$+ (\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

Comparînd (1) din enunț cu (2), deducem $\overrightarrow{EF} = \vec{0}$, i.e. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, ceea ce ne arată că patrulaterul ABCD este paralelogram.

2) a) Fie A_1, A_2, A_3 trei puncte coliniare. Atunci avem:

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $\overrightarrow{A_1A_2} = \lambda \overrightarrow{A_2A_3}$ sau $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \lambda \vec{r}_3 - \lambda \vec{r}_2$ sau

$$\vec{r}_1 - (1+\lambda)\vec{r}_2 + \lambda \vec{r}_3 = \vec{0},$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

adică relaţia (1) din enunţ cu $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1 - \lambda$; $\lambda_3 = \lambda$ şi $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, iar $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0$. Deci condiţiile (1) şi (2) sînt necesare.

b) Fie (1) şi (2) adevărate. Atunci avem

$$\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 \text{ , iar (1) devine } -\lambda_2\vec{r}_1 - \lambda_3\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2 + \lambda_3\vec{r}_3 = \vec{0}$$

sau

$$\lambda_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \lambda_3(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \text{ sau } \overrightarrow{A_1A_2} = \lambda\overrightarrow{A_3A_1}.$$

Această ultimă relaţie ne arată că vectorul $\overrightarrow{A_1A_2}$ este coliniar cu vectorul $\overrightarrow{A_1A_3}$, adică A_1, A_2 şi A_3 sînt coliniare. Astfel condiţiile (1) şi (2) sînt şi suficiente.

<u>Aplicaţie</u>. Fie $2\vec{r}_1 - 7\vec{r}_2 + 5\vec{r}_3 = \vec{0}$. De aici deducem că punctele A_1 $(\vec{r}_1)$, A_2 $(\vec{r}_2)$ şi A_3 $(\vec{r}_3)$ sînt coliniare. In adevăr proprietatea se obţine imediat din rezultatul precedent sau observînd că

$$2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 5(\vec{r}_2 - \vec{r}_3), \quad 2\overrightarrow{A_2A_1} = 5\overrightarrow{A_3A_2}.$$

3) Scriem egalitatea evidentă:

$$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RL} = \vec{0} \tag{1}$$

Dacă avem în vedere că $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{CA}$ şi că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$, rezultă $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RL} = \vec{0}$, adică proprietatea din enunţ.

10. 1) Condiţiile (1) şi (2) sînt necesare. Fie deci punctele respective aşezate în acelaşi plan. Atunci $\exists\, \alpha, \beta \in R$ a.î.

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \alpha\overrightarrow{A_1A_2} + \beta\overrightarrow{A_1A_3} \text{ sau}$$

$$\vec{r}_4 - \vec{r}_1 = \alpha\vec{r}_2 - \alpha\vec{r}_1 + \beta\vec{r}_3 - \beta\vec{r}_1 = \vec{0} \text{ sau}$$

$$\vec{r}_1(1 - \alpha - \beta) + \alpha\vec{r}_2 + \beta\vec{r}_3 - \vec{r}_4 = 0,$$

adică obţinem (1) cu

$$\lambda_1 = 1 - \alpha - \beta, \ \lambda_2 = \alpha, \ \lambda_3 = \beta, \ \lambda_4 = -1 \text{ şi } \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 0.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Condiţiile (1) şi (2) sînt suficiente. Pentru a demonstra aceasta eliminăm între (1) şi (2) pe λ_1. Rezultă

$$\lambda_2(\vec{r}_2-\vec{r}_1) + \lambda_3(\vec{r}_3-\vec{r}_1) + \lambda_4(\vec{r}_4-\vec{r}_1) = \vec{0} \text{ sau}$$

$\overrightarrow{A_1A_4} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_4} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \overrightarrow{A_1A_3}$, $\lambda_4 \neq 0$, relaţie care ne arată că $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ se află în acelaşi plan adică, în fond, că A_1, A_2, A_3 şi A_4 sînt coplanare.

2) Avem imediat

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}.$$

3) α) Avem succesiv: $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$;

$\overrightarrow{D'B'} = \vec{u}-\vec{v}$; $\overrightarrow{AC'} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{B'D} = \vec{v} - \vec{u} - \vec{w}$;

$\overrightarrow{DA'} = \vec{w} - \vec{v}$; $\overrightarrow{CA'} = \vec{w} - \vec{u} - \vec{v}$.

β) Am văzut că $\overrightarrow{AA'} = w$, $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$ şi $\overrightarrow{DB'} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$. Avem evident

$$-\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB'} = \vec{0}. \text{ Deci}$$

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB'}$, de unde deducem coplanaritatea cerută.

11. 1) Obţinem imediat: $\vec{a} = 13\,\vec{i} + 7\,\vec{j} + 15\,\vec{k}$, adică $a_x = 13$, $a_y = 7$ şi $a_z = 15$.

2) Fie $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1$; $\overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_2$; $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$; avem $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$ sau

$$\overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM} = \lambda(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM_2}); \text{ deci}$$

$$-\vec{r}_1 + \vec{r} = -\lambda\vec{r} + \vec{r}_2 \text{ sau}$$

$$\vec{r}(1+\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2, \text{ adică, pentru } 1+\lambda \neq 0,$$

găsim

(1) $$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}$$

3) Avem $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{9} \cdot \overrightarrow{DB}$ sau

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \frac{7}{9}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}),$$

$$9\,\overrightarrow{AC} + 9\,\overrightarrow{CD} = 7\,\overrightarrow{DC} + 7\,\overrightarrow{CB},$$

$$9\,\overrightarrow{CD} + 7\,\overrightarrow{CD} = 9\,\overrightarrow{CA} + 7\,\overrightarrow{CB}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\overrightarrow{CD} = \frac{9\,\overrightarrow{CA} + 7\,\overrightarrow{CB}}{16}$$

12. 1) Avem evident:

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IA};\ \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB};\ \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC};\ \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{ID}.$$

Adunăm aceste relaţii şi găsim:

$$\overrightarrow{SA} = 4\,\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}$$

Dar $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{0}$; rezultă astfel relaţia cerută.

2) α) Evident $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}$, din teorema bisectoarei $\frac{b}{c} = \frac{CA'}{A'B}$ şi $CA' + A'B = a$ rezultă $BA' = \frac{ac}{b+c}$; deci $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{c} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{a}$; din $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$, găsim $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ şi $\overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{c} - c\overrightarrow{b}}{b+c}$; dar noi ştim că $\frac{AA'}{IA'} = \frac{h}{r}$; de aici găsim $AI = AA'\,\frac{h-r}{h}$; acum $\overrightarrow{AI} = AI.$ vers $\overrightarrow{AA'}$ sau

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AA'}\,\frac{h-r}{h} \cdot \frac{b\overrightarrow{c} - c\overrightarrow{b}}{b+c} \cdot \frac{1}{AA'} = \frac{h-r}{h} \cdot \frac{b\overrightarrow{c} - c\overrightarrow{b}}{b+c};$$

dar $h = \frac{2S}{a}$ şi $r = \frac{2S}{a+b+c}$; deci $\frac{h-r}{h} = \frac{b+c}{a+b+c}$; astfel găsim formula de la α), anume $\overrightarrow{AI}\,(a+b+c) = b\overrightarrow{c} - c\overrightarrow{b}$.

β) Avem în continuare $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{AI}$. Dacă avem în vedere că $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{r_3} + \overrightarrow{r_1}$ şi $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}$, obţinem rezultatul de la β).

13. Fie O originea unui reper şi $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$.

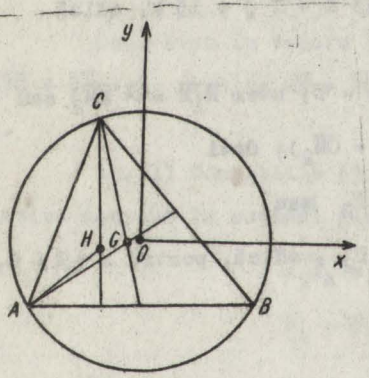


Fig.1.23.

Evident $a = b = c = R$. Mai întîi avem

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA},$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB},$$
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC};$$

de aici prin adunare găsim

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}$, fiindcă

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG}$, iar $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Deci $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$

Apoi scriem $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$. Dar $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ implică $\overrightarrow{AH} \parallel \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Deci

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{a} + \lambda(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \text{ şi analoagele}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\overline{OH} = \overline{b} + \mu(\overline{c} + \overline{a})$$

$$\overline{OH} = \overline{c} + \nu(\overline{a} + \overline{b});$$

de aici găsim

$$\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c} = \overline{b} + \mu\overline{c} + \mu\overline{a} \quad \text{sau}$$

$$\overline{a}(1-\mu) + (\lambda-1)\overline{b} + (\lambda-\mu)\overline{c} = \overline{0}$$

Dar $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ fiind vectori liniar independenţi deducem

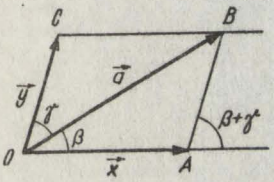
$$\mu = 1, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = \mu$$

Prin urmare $\overline{OH} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, deci 3 $\overline{OG} = \overline{OH}$.

14. 1) Scriem $\overline{x} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, i.e. $(4,3) = (-\lambda, 3\lambda) + (2\mu, 5\mu)$ $(4,3) = (-\lambda + 2\mu, 3\lambda + 5\mu)$ şi obţinem sistemul $-\lambda + 2\mu = 4$, $3\lambda + 5\mu = 3$ cu soluţia $\lambda = -\frac{14}{11}$, $\mu = \frac{15}{11}$. Deci avem descompunerea

$$\overline{x} = -\frac{14}{11}\overline{a} + \frac{15}{11}\overline{b}.$$

2) In triunghiul OAB scriem teorema sinusurilor:



$$\frac{a}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{x}{\sin\gamma} = \frac{y}{\sin\beta}.$$ Rezultă

$$x = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}; \quad y = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}; \quad \text{deci}$$

$$\overline{a} = \overline{x} + \overline{y}.$$

Fig.1.24.

3) α) Găsim imediat: $\overline{AB} = a\overline{i}$; $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = a\overline{i} + a\cos 60^\circ\overline{i} + a\sin 60^\circ\overline{j} = \frac{3a}{2}\cdot\overline{i} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\overline{j}$;

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = a\overline{i} + a\sqrt{3}\,\overline{j}; \quad \overline{AE} = a\sqrt{3}\,\overline{j}; \quad \overline{AF} = \overline{AF'} + \overline{F'F} =$$

$$= -\frac{a}{2}\overline{i} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\overline{j}.$$

β) $\overline{AB} + \ldots + \overline{AF} = 6(\frac{a}{2}\overline{i} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\overline{j}) = 6\cdot\overline{AO}$

γ) Scriem $\overline{AC} = \lambda\overline{AF} + \mu\overline{AD}$, adică

$$\frac{3a}{2}\overline{i} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\overline{j} = \lambda(-\frac{a}{2}\overline{i} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\overline{j}) + \mu(a\overline{i} + a\sqrt{3}\,\overline{j}).$$

De aici obţinem sistemul $\frac{3a}{2} = -\frac{a\lambda}{2} + \mu a$, $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\lambda + \mu a\sqrt{3}$. Rezultă $\lambda = -1$, $\mu = 1$. Adică

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$\vec{AC} = \vec{AD} - \vec{AF}$.

4) Rezolvarea problemei și posibilitatea descompunerii forței de 8 N în orice două componente egale, de valori $\geq$ 4 N, rezultă din figurile alăturate și din posibilitatea de a construi triunghiurile isoscele OAM (MO = MA) cu o bază dată OA (= 8 N);

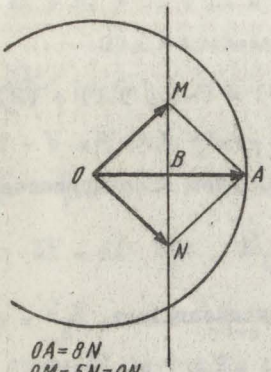


Fig.1.25.

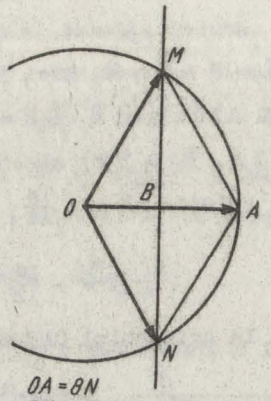


Fig.1.26.

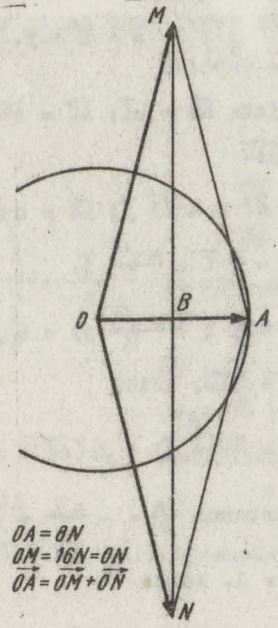


Fig.1.27.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

15. 1) La început vom descompune pe $\vec{F}$ în două componente în $\vec{F}_A$ și $\vec{F}'$ (vedeți figura). Mai întîi calculăm pe AH. Deoarece AB' = c cos A, avem AH = a ctg A.

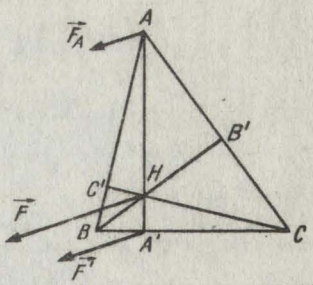


Fig.1.28.

Din ecuațiile

$$F = F_A + F' \text{ și } AH \cdot F_A = F'(AA' - AH),$$

deducem $F_A = \frac{F(AA' - a \operatorname{ctg} A)}{AA'}$. Dar, $AA' = h_a = b \cdot \sin C$ și atunci $F_A = F \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$. Rezultatul găsit fiind simetric, descompunînd pe $\vec{F}'$ după două forțe $\vec{F}_B$ și $\vec{F}_C$ paralele cu $\vec{F}$, cu punctele de aplicație în B și C, vom găsi:

$$F_B = F \operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{ctg} A \text{ și } F_C = F \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B.$$

Acum relația cerută rezultă din egalitatea $F = F_A + F_B + F_C$ sau din

$$F = \frac{F}{\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B} + \frac{F}{\operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C} + \frac{F}{\operatorname{tg}C \cdot \operatorname{tg}A}$$

2) Fie $\vec{R} = \vec{AB}$; problema s-a redus la determinarea lui $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, pentru care $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$ și $\frac{F_1}{F_2} = k$, i.e. $\frac{MA}{MB} = k$. Ori se știe că locul lui M e un cerc de diametru CD, unde C și D sînt punctele de pe AB care împart pe AB în același praport k, punctul C fiind în interiorul segmentului AB, iar D în exteriorul lui (A se vedea Manualul de geometrie de cl. IX-a de Cezar Coșniță). Acum pentru a face descompunerea lui $\vec{R}$ cerută, luăm un punct M oarecare de pe cercul de diametru CD și-l unim cu A și B. Vom avea: $\vec{R} = \vec{AM} + \vec{MB}$.

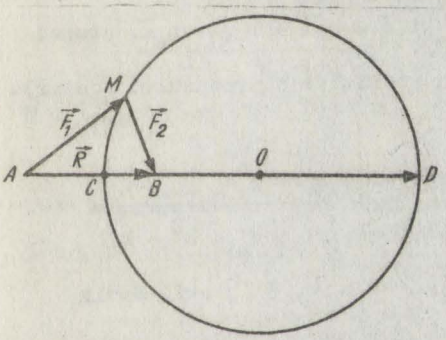


Fig.1.29.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

§ 1.2. Produsul scalar a doi vectori

1.2.1. Rezumat teoretic

1. **Definiţie.** Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori din V. Produsul scalar (ps) al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se numeşte numărul real $ab\cos(\vec{a},\vec{b})$ şi se notează $\vec{a}.\vec{b}$ sau $\vec{a}\vec{b}$.

Deci

$$\vec{a}\vec{b} = ab\cos(\vec{a},\vec{b})$$

Proprietăţi: 1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (ps e comutativ), $\forall \vec{a},\vec{b} \in V$

2. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$, $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V$.

3. ps nu e asociativ, i.e. $\vec{a}(\vec{b}.\vec{c}) \neq (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$.

4. $\vec{a}.\vec{b} = 0$ şi $ab \neq 0 \leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

5. $\vec{a}.\vec{b} = a.\mathrm{Pr}\,\vec{b} = b.\mathrm{Pr}\,\vec{a}$, $\forall \vec{a},\vec{b} \in V$.

6. $\vec{i}.\vec{i} = 1$; $\vec{j}\vec{j} = 1, \vec{k}.\vec{k} = 1$.

7. $\vec{i}\vec{j} = 0$; $\vec{j}\vec{k} = 0$, $\vec{k}\vec{i} = 0$.

8. $(\lambda\vec{a}).(\mu\vec{b}) = (\lambda\mu).\vec{a}\vec{b}, \forall \lambda,\mu \in R$ şi $\forall \vec{a},\vec{b} \in V$

9. Dacă $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ şi $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, atunci

$\vec{a}\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ (expresia analitică a produsului scalar).

10. $a = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$, $\forall \vec{a} \in V$

11. $$\cos(a,b) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ab} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

2. **Definiţie.** Fie $\vec{a}$ un vector şi $(d, O, \vec{u})$ o axă. Numim proiecţia vectorului $\vec{a}$ pe axa de versor $\vec{u}$ numărul $\vec{a}\vec{u}$. Deci

$$\mathrm{Pr}_d\vec{a} = \vec{a}\vec{u} = a\cos(\vec{a},\vec{u}) = a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma$$

dacă $\vec{u} = \cos\alpha.\vec{i} + \cos\beta.\vec{j} + \cos\gamma.\vec{k}$.

Proprietăţi: 1. $\mathrm{Pr}_{Ox}\vec{a} = a_x = a\cos(\vec{a},\vec{i}) = \vec{a}.\vec{i}$

$\mathrm{Pr}_{Oy}\vec{a} = a_y = a\cos(\vec{a},\vec{j}) = \vec{a}.\vec{j}$

$\mathrm{Pr}_{Oz}\vec{a} = a_z = a\cos(\vec{a},\vec{k}) = \vec{a}.\vec{k}$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2. $\mathrm{Pr}_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

3. $\mathrm{Pr}_{\vec{b}}(\vec{a} + \vec{c}) = \mathrm{Pr}_{\vec{b}}\vec{a} + \mathrm{Pr}_{\vec{b}}\vec{c}$.

1.2.2. Exerciţii

16. 1) Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori nenuli din $\mathbb{R}^3$. Să se arate că

(1) $$(\frac{\vec{a}}{a^2} - \frac{\vec{b}}{b^2})^2 = \frac{(\vec{a}-\vec{b})^2}{a^2 b^2}.$$

2) Fie $\vec{a}$ un vector din $\mathbb{R}^3$. Atunci vectorul $\vec{a} - (\vec{a}\vec{i})\vec{i}$ este perpendicular pe $\vec{i}$. Care e sensul geometric al acestui rezultat?

17. 1) Fie $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ patru vectori oarecari din $\mathbb{R}^3$.

Să se verifice identitatea:

(1) $$(\vec{d} - \vec{a})(\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{d} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{d} - \vec{c})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

2) Să se demonstreze că

$$-ab \leqslant \vec{a}.\vec{b} \leqslant ab, \quad \forall \vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

18. 1) Cu vectorii daţi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ construim vectorul $\vec{u} = \vec{v}_1(\vec{v}_2.\vec{v}_3) - \vec{v}_2(\vec{v}_1.\vec{v}_3)$. Arătaţi că $\vec{u} \perp \vec{v}_3$.

2) Să se arate că produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{CA}$ şi $\overrightarrow{CB}$, care pleacă din vîrful C al unui triunghi ABC se poate exprima în funcţie de laturile triunghiului prin formula

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{b^2+a^2-c^2}{2}$$

19. 1) Să se calculeze unghiul dintre vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$, precum şi lungimea diagonalei paralelogramului construit pe aceşti vectori drept laturi.

2) Doi vectori din $\mathbb{R}^3$ şi suma lor vectorială au acelaşi modul. Să se determine unghiul dintre cei doi vectori. Aceeaşi problemă pentru cazul în care suma vectorilor se înlocuieşte cu diferenţa lor.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2o. 1) Fie $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ şi $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ doi vectori din $\mathbb{R}^3$.

Să se calculeze:

α) vers $\vec{a}$, vers $\vec{b}$, vers $(\vec{a}+\vec{b})$.

β) $\vec{a}.\vec{b}$.

γ) proiecţia lui $\vec{a}$ pe $\vec{b}$ şi a lui $\vec{b}$ pe $\vec{a}$.

δ) unghiul θ dintre cei doi vectori

2) In vîrful A al cubului ABCDA'B'C'D' din figură, după diagonalele AC, AB' şi AD' sînt aplicate forţele $F_1 = 1$ N, $F_2 = 2$ N şi $F_3 = 3$ N. Se cere mărimea rezultantei acestor trei forţe.

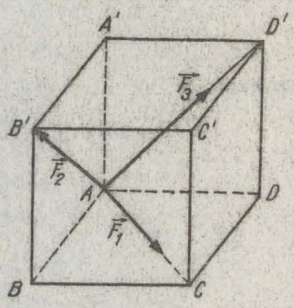


Fig.1.3o.

21. 1) Fie paralelopipedul OABCDA'EC' de dimensiuni a,b,c (i.e. OA=a, OC = b şi OD = c şi forţele care acţionează ca în figura alăturată, avînd intensităţile egale cu lungimile laturilor sau ale diagonalelor în lungul cărora sînt aplicate.

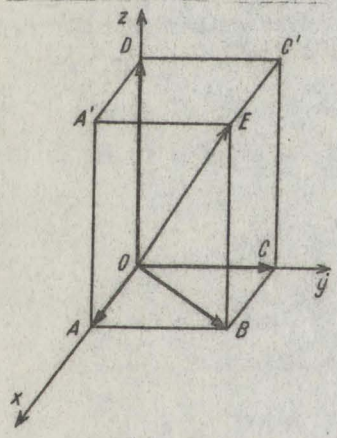


Fig.1.31.

α) Să se determine proiecţiile forţelor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ şi $\overrightarrow{OE}$ pe axe.

β) Să se afle rezultanta acestor forţe şi unghiurile pe care le face aceasta cu axele de coordonate.

2) Se dau vectorii

$\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$ şi $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

Să se calculeze $\vec{a}.\vec{b}$, unghiul dintre $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, proiecţia lui $\vec{a}$ pe $\vec{b}$ şi a lui $\vec{b}$ pe $\vec{a}$, ecuaţiile dreptelor - suport ale acestor vectori, care trec prin O. Să se transforme aceste drepte-suport în axe.

22. Fie A(1, - 1,2), B(2, 1, 0) şi C(3,2, - 6) trei puncte din $\mathbb{R}^3$. Să se afle:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

α) $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$; $\vec{AB} + \vec{AC}$; $\vec{BC} - \vec{AC}$

β) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$, γ) vers $\vec{AC}$; δ) $\mathrm{Pr}_{\vec{AC}}\vec{AB}$;

ε) $\vec{e}$ = vers $\vec{AB}$; φ) $\mathrm{Pr}_{\vec{AB}}\vec{AC}$.

23. 1) Fie triunghiul determinat de punctele A(2,4,5), B(- 3, 2, 2) și C(-1, 0, 3) din $\mathbb{R}^3$. Să se arate că $\vec{CA} \perp \vec{CB}$.

2) Să se determine parametrul $\lambda \in \mathbb{R}$ a.î. vectorii $\vec{a} = \vec{i} + 2\lambda\vec{j} - (\lambda-1)\vec{k}$ și $\vec{b} = (3-\lambda)\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ să fie perpendiculari. Aceeași problemă pentru vectorii $\vec{a}' = (\lambda, 2, 1)$ și $\vec{b}' = (\lambda - 2\lambda, 3)$.

24. 1) Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori nenuli. Atunci

(1) $$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

2) Fie $\vec{a}, \vec{b}$ doi vectori ortogonali nenuli din $\mathbb{R}^3$. Demonstrați că ei sînt liniar independenți.

3) Un vector $\vec{a}$ din $\mathbb{R}^3$, de modul a formează cu axa Ox un unghi $\alpha = 45^\circ$, cu Oy un unghi $\beta = 60^\circ$ și cu Oz un unghi obtuz γ. Să se afle proiecțiile lui $\vec{a}$ pe axele reperului Oxyz.

4) Fie vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ din $\mathbb{R}^3$, cu a = 2, b = 1, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ și vectorii $\vec{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ și $\vec{B} = 3\vec{a} - \vec{b}$.

Să se afle unghiul dintre vectorii $\vec{A}$ și $\vec{B}$.

25. Fie reperul $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ și reperul $(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ obținut din primul printr-o rotație cu unghiul θ în jurul lui Oz.

1) Să se exprime $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ în funcție de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ și θ.

2) Să se găsească proiecțiile a'_x, a'_y, a'_z ale unui vector $\vec{a}$ dat, în funcție de proiecțiile a_x, a_y, a_z și de unghiul θ , a_x, a_y, a_z fiind proiecțiile lui $\vec{a}$ în reperul inițial $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

3) Să se arate că

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a_x'^2 + a_y'^2 + a_z'^2$$

26. Să se determine rezultanta $\vec{R}$ a două forțe $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ din plan aplicate unui punct O, știind că ele fac un unghi α între ele. Se cer unghiurile pe care $\vec{R}$ le face cu $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$.

Problemă analoagă pentru diferența $\vec{D} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$.

Cdr. 236/987 Fasc. 3

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Aplicaţie numerică pentru $F_1 = 5$ N, $F_2 = 3$ N, $\alpha = 60^o$.

27. 1) Fie triunghiul nedreptunghic ABC şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci avem

$$\overrightarrow{OA} \sin 2A + \overrightarrow{OB} \sin 2B + \overrightarrow{OC} \sin 2C = \vec{0}$$

2) (Inegalitatea lui Cauchy) $\forall a_1,\dots,a_n, b_1, b_2,\dots,b_n \in \mathbb{R}$ avem $(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$.

Inegalitatea devine egalitate $\iff a_1 = b_1,\dots,a_n = b_n$.

28. (Lucrul mecanic al unei forţe constante de-a lungul unui drum rectiliniu) 1) Forţa $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ deplasează un corp, în linie dreaptă, din punctul A(1,3) în B(5,6). Se cere lucrul mecanic efectuat de $\vec{F}$ pe această distanţă.

2) Forţele $\vec{F_1} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ şi $\vec{F_2} = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$ acţionează asupra unei particule pe care o deplasează din A (20,15,1) în B (1,2, - 3), în linie dreaptă.

Care este lucrul mecanic efectuat de $\vec{F_1}$, de $\vec{F_2}$ şi de $\vec{F_1}+\vec{F_2}$?

Aceleaşi întrebări cînd deplasarea se face în sens contrar, i.e. de la B la A.

Forţele se măsoară în newtoni şi distanţele în metri.

29. 1) Se ştie că rezultanta a două forţe $\vec{F_1}$ şi $\vec{F_2}$ este perpendiculară pe $\vec{F_1}$, iar rezultanta forţelor $2\vec{F_1}$ şi $3\vec{F_2}$ este perpendiculară pe $\vec{F_2}$. Să se stabilească relaţia dintre F_1 şi F_2.

2) Să se arate că în orice triunghi ABC avem (cu notaţiile consacrate)

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4S} = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$$

30. 1) (Teorema lui Pitagora). In orice triunghi dreptunghic avem: pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

2) Să se deducă pe cale vectorială teoremele:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

c) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3) Să se demonstreze că un paralelogram ABCD ortodiagonal este un romb.

4) Să se demonstreze <u>teorema paralelogramului</u>: în orice paparelogram suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor tuturor laturilor.

31. 1) (<u>Teorema cosinusului sau teorema lui Carnot</u>): In orice triunghi ABC, cu notaţiile consacrate, avem

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

2) (<u>Formula bisectoarei</u>). In triunghiul ABC în care $\overline{CD}$ este bisectoarea unghiului C avem:

α) $\overline{CD} = \frac{a\vec{b} + b\vec{a}}{a+b}$, unde $\vec{b} = \overline{CA}$, $\vec{a} = \overline{CB}$

β) $CD = i_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$, unde $2p = a+b+c$

3) (<u>Teorema lui Euler</u>). Să se calculeze distanţa dintre mijloacele diagonalelor unui patrulater convex în funcţie de lungimile laturilor şi ale diagonalelor.

4) (<u>Teoremele lui Ptolemeu</u>). In patrulaterul inscriptibil ABCD avem:

α) $CA.BD = BC.AD + AB.CD$

β) $\frac{CA}{BD} = \frac{AB.AD+CB.CD}{BA.BC+DC.DA}$

32. 1) Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, ABD un alt triunghi dreptunghic, în B, situate în plane perpendiculare, M mijlocul lui AB, N mijlocul lui CD, P mijlocul lui CB şi Q mijlocul lui BD.

Să se arate că:

α) $\overline{MN} \perp \overline{AB}$; β) $\overline{NP} \perp \overline{CB}$; γ) $\overline{NQ} \perp \overline{BD}$.

2) Se consideră tetraedrul ABCD în care $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$. Să se arate că:

α) $AD \perp BC$

β) $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2 = CA^2 + BD^2$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Să se calculeze distanţa d de la vîrful C al unui triunghi ABC, oarecare, pînă la punctul G de intersecţie a medianelor triunghiului AHB, H fiind ortocentrul triunghiului ABC (vedeţi figura alăturată).

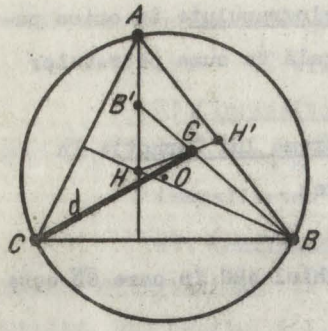


Fig.1.32.

33. 1) Fie triunghiul echilateral ABC. Pe latura AB se ia punctul C_1, a.î. $AC_1 = \frac{3}{2} C_1B$, iar pe AC se ia punctul B_1 a.î. $AB_1 = \frac{3}{14} \cdot B_1C$. Segmentele BB_1 şi CC_1 se taie în O. Să se arate că $AO \perp OC$.

2) Fie d_1, d_2, d_3 trei drepte din $\mathbb{R}^3$, care se intersectează în punctul A şi P_1, P_2, P_3 operaţiile de proiectare a punctelor din spaţiu pe aceste drepte. Fie $B \in \mathbb{R}^3$ un punct oarecare.

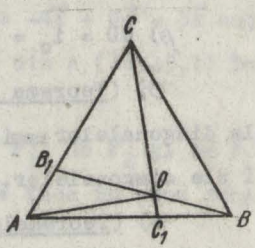


Fig.1.33.

Să se arate că dreapta care uneşte punctele $C_1 = (P_1 \circ P_2 \circ P_3)(B)$ şi $B_3 = P_3 \circ P_2 \circ P_1)(B)$ este perpendiculară pe AB.

34. 1) Să se afle locul geometric al punctelor M din $\mathbb{R}^3$ din care un segment dat AB = 2c se vede sub un unghi drept.

2) Să se determine locul geometric al punctelor $M \in \mathbb{R}^3$, al căror raport al distanţelor la două puncte fixe date A şi B este constant şi egal cu $k \in \mathbb{R}_+^*$

3) O rachetă R este reperată de patru staţii radar, aşezate în vîrfurile unui pătrat de latură $a\sqrt{2}$ şi din acestea se determină distanţele d_1, d_2, d_3, d_4 pînă la rachetă la momentul t.

Să se arate că

$\alpha)$ $d_1^2 + d_3^2 = d_2^2 + d_4^2$

$\beta)$ $h^2 = -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2) - \frac{1}{8a^2}(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 +$

$+ d_4^4 - 2d_1^2 d_3^2 - 2d_2^2 d_4^2)$,

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde h este înălțimra rachetei interceptate.

A.M.M., Concursul W.L.Putnam, USA.

1.2.3. Rezolvarea exercițiilor

16. 1) Ridicînd la pătrat prima parte a egalității (1), obținem:

$$\frac{a^2}{a^4} + \frac{b^2}{b^4} - \frac{2\,\vec{a}\vec{b}}{a^2b^2} = \frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2} - \frac{2\,\vec{a}\vec{b}}{a^2b^2},$$

adică partea a doua a aceleiași egalități.

2) Avem $(\vec{a} - (\vec{a}\,\vec{i})\cdot\vec{i})\,\vec{i} = \vec{a}\cdot\vec{i} - (\vec{a}\,\vec{i})\vec{i}^2 = (\vec{a}\,\vec{i}) - (\vec{a}\cdot\vec{i})\cdot 1 = 0$. Vectorul $\vec{a} - (\vec{a}\,\vec{i})\,\vec{i} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} - a_x\vec{i} = a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ este componenta vectorului $\vec{a}$ într-un plan perpendicular pe $\vec{i}$.

17. 1) Desfacem parantezele și găsim imediat identitatea (1).

2) Avem $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = a^2b^2\cos^2\theta \leq a^2b^2$, sau $(\vec{a}\,\vec{b})^2 \leq a^2b^2$. De aici rezultă $|\vec{a}\vec{b}| \leq ab$, respectiv $-ab \leq \vec{a}\cdot\vec{b} \leq ab$.

18. 1) Avem $\vec{u}\cdot\vec{v}_3 = (\vec{v}_1\vec{v}_3)(\vec{v}_2\vec{v}_3) - (\vec{v}_2\vec{v}_3)(\vec{v}_1\vec{v}_3) = 0$; rezultă $\vec{u} \perp \vec{v}_3$.

2) Proprietatea e imediată:

$$\vec{CA}\cdot\vec{CB} = ab\cos C = ab\,\frac{b^2+a^2-c^2}{2\,ab} = \frac{b^2+a^2-c^2}{2}$$

19. 1) Avem $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 1 - (1\cdot 2) = 0$; cum $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$, rezultă $\cos\theta = 0$, adică $\theta = 90^o$. Apoi avem $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = 3\,\vec{i} - \vec{j}$, $R = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, α fiind unghiul făcut de $\vec{R}$ cu axa Ox, iar β unghiul făcut de $\vec{R}$ cu axa Oy.

2) Avem $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$ cu $R = a = b$. Prin ridicarea la pătrat deducem $a^2 = a^2 + a^2 + 2a^2\cos\theta$; $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = 120^o$. In cazul diferenței găsim $\theta = 60^o$.

20. 1) α) Avem: $a = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14}$;
$b = \sqrt{4^2+(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$; vers $\vec{a} = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}\,\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\,\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\,\vec{k}$;

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

vers $\vec{b} = \frac{\vec{b}}{b} = \frac{4}{\sqrt{26}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{26}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{26}}\vec{k}$; $\vec{a} + \vec{b} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$,

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5^2+(-5)^2+2^2} = \sqrt{54}$, vers $(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{54}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{54}}\vec{j} +$

$+ \frac{2}{\sqrt{54}}\vec{k}$.

β) $\vec{a}.\vec{b} = 1.4 + (-2)(-3)+3.(-1) = 7$

γ) $\text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{a}.\text{vers}\,\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{b} = \frac{7}{\sqrt{26}}$

$\text{Pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{b}\,.\,\text{vers}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{a} = \frac{7}{\sqrt{14}}$

δ) $\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{a.b} = \frac{7}{\sqrt{26.14}}$; $\theta \simeq 68^o$

2) Observăm că triunghiurilor AB'C, ACD' și AB'D' sînt egale și echilaterale, adică $\sphericalangle B'AC = \sphericalangle CAD' = \sphericalangle D'AB' = 60^o$. Din $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, prin ridicare la pătrat, obținem:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + 2(F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_1)\cos 60^o =$$

$$= 1 + 4 + 9 + 2\,(2 + 6 + 3)\tfrac{1}{2} = 25;\ R = 5\ N.$$

Altfel: $\vec{F}_1$ are proiecțiile $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $\vec{F}_2$ are proiecțiile $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, iar $\vec{F}_3$ are proiecțiile $(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$. Deci $\vec{R}$ va avea proiecțiile $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$, respectiv mărimea $R = \sqrt{\frac{9}{2} + 8 + \frac{25}{2}} = 5N$. Unghiurile pe care le face $\vec{R}$ cu axele de coordonate se determină din $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{10}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, unde $\alpha = \sphericalangle(\vec{R},\vec{i})$, $\beta = \sphericalangle(\vec{R},\vec{j})$, $\gamma = \sphericalangle(\vec{R},\vec{k})$.

21. 1) α) Avem imediat: $\vec{OA} = a\vec{i}$, $\vec{OB} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $\vec{OC} = b\vec{j}$, $\vec{OD} = c\vec{k}$, $\vec{OE} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$;

β) Rezultanta $\vec{R}$ este $\vec{R} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = 3\,a\vec{i} + 3\,b\vec{j} + 2\,c\vec{k}$; fie α, β, γ unghiurile pe care $\vec{R}$ le face cu axele de coordonate; ele se deduc din

$$\cos\alpha = \frac{\vec{R}.\vec{i}}{R} = \frac{3a}{\sqrt{9a^2+9b^2+4c^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{R}.\vec{i}}{R} = \frac{3b}{\sqrt{9a^2+9b^2+4c^2}}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\cos\gamma = \frac{\vec{R}\cdot\vec{k}}{R} = \frac{2c}{\sqrt{9a^2+9b^2+4c^2}}$$

2) α) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3.1 + (-5).2 + 4.3 = 5.$

β) $a = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{50}$; $b = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$; din $ab\cos\theta = 5$, deducem $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{50}\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{28}}$

γ) vers $\vec{a} = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{3}{\sqrt{50}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{50}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{50}}\vec{k}$;

$\Pr_{\vec{a}}\vec{b} = (\text{vers }\vec{a})\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; vers $\vec{b} = \frac{\vec{b}}{b} = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} +$

$+ \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$; $\Pr_{\vec{b}}\vec{a} = (\text{vers }\vec{b})\vec{a} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{b} = \frac{5}{\sqrt{14}}$

δ) (d) $\frac{x}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{4}$ (dreapta - suport d prin O a lui $\vec{a}$);

(d') $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ (dreapta - suport d' prin O a lui $\vec{b}$)

ε) Axa corespunzătoare dreptei-suport a vectorului $\vec{a}$ este $(d, O, \frac{\vec{a}}{a})$, iar cea corespunzătoare dreptei-suport a vectorului $\vec{b}$ este $(d', O, \frac{\vec{b}}{b})$.

22. α) Avem $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} =$

$= \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$; $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k} =$

$= 2\vec{i} + 3\vec{j} - 8\vec{k}$; $\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B)\vec{i} + (y_C - y_B)\vec{j} + (z_C - z_B)\vec{k} =$

$= \vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$; $AB = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$; $AC = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-8)^2} =$

$= \sqrt{77}$; $BC = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{38}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 10\vec{k}$; $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} =$

$= -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

β) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 1.1+2.1+(-2)(-6) = 15$;

γ) vers $\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{2}{\sqrt{77}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{77}}\vec{j} - \frac{8}{\sqrt{77}}\vec{k}$;

δ) $\Pr_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\text{vers }\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{2+6+16}{\sqrt{77}} = \frac{24}{\sqrt{77}}$

ε) vers $\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

φ) $Pr_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$. vers $\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB} = \frac{24}{3} = 8$.

23. 1) Calculăm pe $\overrightarrow{AC} = (-3, -4, -2)$ și pe $\overrightarrow{CB} = (-2, 2, -1)$; acum avem $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = 6 - 8 + 2 = 0$. Deci $\hat{C} = 90^o$.

2) O condiție necesară și suficientă pentru ca vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ nenuli să fie perpendiculari este ca produsul lor scalar să fie nul, i.e.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$; dar $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1(3-\lambda) + 2\lambda + 3(1-\lambda)$; deci

$3 - \lambda + 2\lambda + 3 - 3\lambda = 0$; rezultă $\lambda = 3$.

Astfel vectorii (1, 6 -2) și (0, 1, 3) sînt ortogonali.

Scriind și de astă dată că $\vec{a}\perp\vec{b}$ obținem ecuația $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Deci $\vec{a}\perp\vec{b}$ pentru $\lambda_1 = 1$ sau $\lambda_2 = 3$, adică perechile de vectori (1, 2, 1) și (1, -2, 3) respectiv (3, 2, 1) și (3, -6, 3) sînt perpendiculare.

24. 1) Prin ridicare la pătrat, (2) se mai scrie:

$$(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2 = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2$$

Dezvoltînd și reducînd termenii asemenea rezultă:

(1) $\quad 4.(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z) = 0$, adică $\vec{a}\perp\vec{b}$

Proprietatea reciprocă este imediată, dacă urmărim calculele precedente în sens invers.

2) Presupunem că vectorii nu sînt liniar independenți, i.e. $\exists\,\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ a.î. $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$.

Dar $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})\cdot\vec{a} = \lambda a^2 = 0$, deci $\lambda = 0$;

Asemănător avem $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})\cdot\vec{b} = \mu b^2 = 0$, deci $\mu = 0$. Astfel relația $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$ plus condiția $\vec{a}\perp\vec{b}$ implică $\lambda = 0$ și $\mu = 0$. Deci $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt liniar independenți.

3) Avem $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, relație care ne conduce la $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1$; $\cos^2\gamma = \frac{1}{4}$; $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$, $\gamma = 120^o$. Acum scriem imediat

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$a_x = a\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $a_y = a\cos\beta = \frac{a}{2}$; $a_z = a\cos\gamma = -\frac{a}{2}$

4) După cum se ştie avem

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

Acum $\vec{A}\cdot\vec{B} = 6a^2 + 7\vec{a}\cdot\vec{b} - 3b^2 = 6\cdot 4 + 7\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot 1 = 28$; apoi

$$A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{4a^2 + 9b^2 + 12\,\vec{a}\cdot\vec{b}} = \sqrt{16 + 9 + 12\cdot\frac{1}{2}\cdot 2} = \sqrt{37};$$

$$B = \sqrt{\vec{B}\cdot\vec{B}} = \sqrt{9a^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2} = \sqrt{31}.$$

Deci $\cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{28}{\sqrt{37\cdot 31}}$ şi $\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}) \simeq 35^0$

25. 1) Evident $\vec{k}' = \vec{k}$. Scriem apoi, $\vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j}$ şi $\vec{j}' = c\vec{i} + d\vec{j}$. Inmulţim scalar aceste egalităţi cu $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ şi găsim

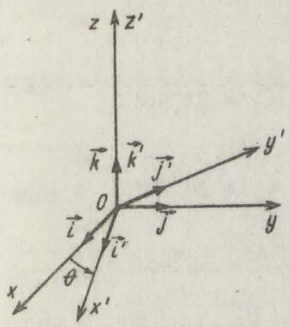


Fig.1.34.

$a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $c = -\sin\theta$

$d = \cos\theta$. Deci

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j} \\ \vec{j}' = -\sin\theta\cdot\vec{i} + \cos\theta\cdot\vec{j} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{i} = \vec{i}'\cos\theta - \vec{j}'\sin\theta \\ \vec{j} = \vec{i}'\sin\theta + \vec{j}'\cos\theta \end{cases}$$

2) Acum scriem $\vec{a} = a'_x\vec{i}' + a'_y\vec{j}' + a'_z\vec{k}' = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; înlocuind pe $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ în funcţie de $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ şi egalînd coeficienţii lui $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ şi $\vec{k}'$, găsim

$$\begin{cases} a'_x = a_x\cos\theta + a_y\sin\theta \\ a'_y = -a_x\sin\theta + a_y\cos\theta \\ a'_z = a_z. \end{cases}$$

3) pe baza relaţiilor de mai sus, rezultă imediat că: $a'^2_x + a'^2_y + a'^2_z = a^2_x + a^2_y + a^2_z = a^2$, adică lungimea vectorului $\vec{a}$ este un invariant la rotaţia de unghiul θ în jurul lui Oz.

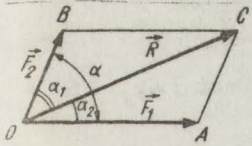


Fig.1.35.

26. Din $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ deducem

$$R^2 = F_1^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$

Din triunghiul OAC, cu ajutorul teoremei sinusurilor, obţinem $\frac{\sin\alpha_2}{F_2} = \frac{\sin\alpha}{R}$, resctiv

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$\sin \mathcal{L}_2 = \frac{F_2 \sin \mathcal{L}}{R}$. Analog din triunghiul OBC, găsim

$\sin \mathcal{L}_1 = \frac{F_1 \sin \mathcal{L}}{R}$.

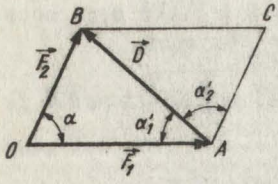


Fig.1.36.

Din $\vec{D} = -\vec{F_1} + \vec{F_2}$ deducem $D^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos \mathcal{L}$

Cu ajutorul aceleiași teoreme a sinusurilor găsim:

$$\sin \mathcal{L}_1' = \frac{F_2 \sin \mathcal{L}}{D}, \quad \sin \mathcal{L}_2 = \frac{F_1 \sin \mathcal{L}}{D}$$

In cazul aplicației numerice obținem

$R^2 = 25 + 9 + 2.15 \cdot \frac{1}{2} = 49$; $R = 7$ N

$D^2 = 25 + 9 - 15 = 19$; $D = 4{,}36$ N.

$\sin \mathcal{L}_1 = \frac{3 \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{1.5.1{,}73}{7} = 0{,}3707142$; $\mathcal{L}_1 = 21^o4o'$.

$\sin \mathcal{L}_2 = \frac{5 \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{2{,}5 \cdot 1{,}73}{7} = 0{,}617871$; $\mathcal{L}_2 = 38^o2o'$

$\sin \mathcal{L}_1' = \frac{1{,}5 \cdot 1{,}73}{4{,}36} = 0{,}5951834$ $\qquad \mathcal{L}_1' = 36^o4o'$

$\sin \mathcal{L}_2' = \frac{2{,}5 \cdot 1{,}73}{4{,}36} = 0{,}9931483$, $\qquad \mathcal{L}_2 = 83^o2o'$

Dăm în continuare un desen la scară, pe care se pot citi valorile calculate mai sus:

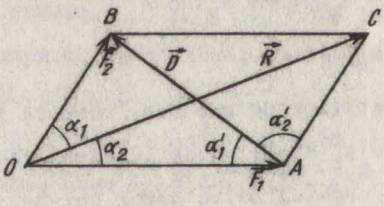


Fig.1.37.

27. 1) Vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sînt coplanari. Deci $\exists \mathcal{L}, \beta \in \mathbb{R}$ a.î. $\overrightarrow{OC} = \mathcal{L} \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$. Avem apoi

$$\begin{cases} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \mathcal{L} R^2 + \beta \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \mathcal{L} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \beta R^2 \end{cases} \quad \text{sau}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\begin{cases} \cos 2B = \alpha + \beta \cos 2C \\ \cos 2A = \alpha \cos 2C + \beta \end{cases}$$

Ipoteza $C \neq \frac{\pi}{2}$ ne conduce la

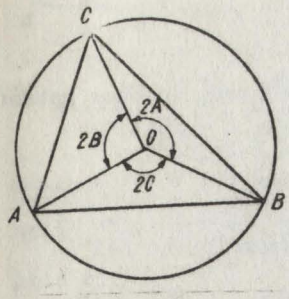


Fig.1.38.

$$\alpha = \frac{\cos 2B - \cos 2A \cos 2C}{1 - \cos^2 2C} = -\frac{\sin 2A}{\sin 2C}$$

$$\beta = \frac{\cos 2A - \cos 2B \cos 2C}{1 - \cos^2 2C} = -\frac{\sin 2B}{\sin 2C} \text{ . Etc.}$$

2) Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$ doi vectori din $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalar. Atunci $(\vec{a} + \lambda . \vec{b})^2 \geq 0$

Deci

$$a^2 + 2\lambda \vec{a}\vec{b} + \lambda^2 b^2 \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$

$$(\vec{a}.\vec{b})^2 \leq a^2 . b^2 \quad \text{adică}$$

$$(1) \qquad (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)$$

Dacă $\vec{a} = \vec{b}$ avem egalitatea în (1), iar dacă (1) are loc cu semnul egal, adică $a^2 b^2 \cos^2\theta = a^2 b^2$ rezultă $\cos^2\theta = 1$ etc.

28. 1) $L = \vec{F}.\vec{AB} = (3,4).(4,3) = 24$ J.

2) $L_1 = \vec{F}_1.\vec{AB} = (-2, -2, -4).(-19, -13, -4) =$

$= 38 + 26 + 16 = 80$ J; $L_2 = \vec{F}_2 . \vec{AB} = (-4, 6, -3).(19, -13, -4) =$

$= 76 - 78 + 12 = 10$ J; $L = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2).\vec{AB} = L_1 + L_2 = 90$ J;

$L_1' = \vec{F}_1.\vec{BA} = -L_1 = -80$ J; $L_2' = -L_2 = -10$ J; $L' = -L_1 - L_2 = -90$ J.

29. 1) Scriem căs $\vec{F}_1 \perp \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ și că $\vec{F}_2 \perp 2\vec{F}_1 + 3\vec{F}_2$. Rezultă $F_1^2 + \vec{F}_1\vec{F}_2 = 0$ și $2\vec{F}_1\vec{F}_2 + 3F_2^2 = 0$. Eliminăm produsul $\vec{F}_1.\vec{F}_2$ și găsim $F_1\sqrt{2} = F_2\sqrt{3}$.

2) Fie $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$.

Avem $\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\vec{AB}.\vec{AC}}{AB.AC \sin A} = -\frac{\vec{bc}}{2S}$

și analoagele

$$\operatorname{ctg} B = -\frac{\vec{ac}}{2S} \; ; \; \operatorname{ctg} C = -\frac{\vec{ab}}{2S}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Adunînd aceste trei relaţii obţinem:

$$ctgA + ctgB + ctgC = -\frac{\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{ca}}{2S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2}{4S} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}, \quad \text{fiindcă } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

3o. 1) Fie triunghiul dreptunghic din figură, în care notăm:

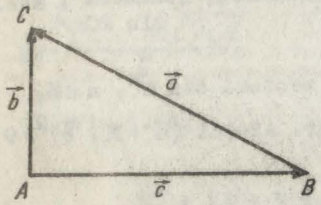


Fig.1.39.

$\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$ şi $\vec{AC} = \vec{b}$.

Avem $\vec{a} = -\vec{c} + \vec{b}$ şi $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Din expresia vectorială a ipotenuzei găsim:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\underbrace{\vec{bc}}_{0} = b^2 + c^2.$$

2)

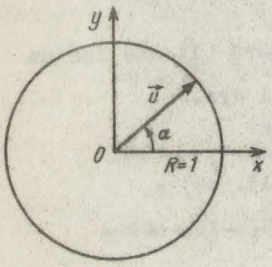


Fig.1.4o.

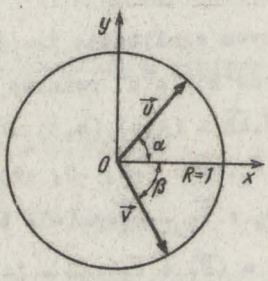


Fig.1.41.

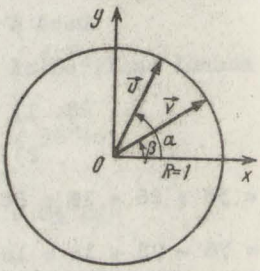


Fig.1.42.

a) In figura 1.4o. scriem că versorul $\vec{u}(\cos \alpha, \sin \alpha)$ are modulul 1, i.e. $u^2 = 1$; deducem $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

b) Cu notaţiile din figura 1.41. scriem produsul scalar al versorilor $\vec{u}(\cos \alpha, \sin \alpha)$ şi $\vec{v}(\cos \beta, -\sin \beta)$; găsim

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

c) Cu notaţiile din figura 1.42. efectuăm produsul scalar al versorilor $\vec{u}(\cos \alpha, \sin \alpha)$ şi $\vec{v}(\cos \beta, \sin \beta)$. Observînd că $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha - \beta$, obţinem $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

3) Avem $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ şi $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{BC} - \vec{AB}$. Din $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

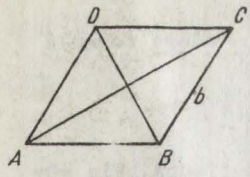


Fig.1.43.

rezultă $(\vec{BC} - \vec{AB})(\vec{BC} + \vec{AB}) = 0$ sau

$b^2 = a^2$, i.e. $a = b$.

Deci AB = BC = AD și paralelogramul ABCD este un romb.

4) Conform figurii putem scrie:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}, \qquad (1)$$

$$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} \qquad (2)$$

Observăm că $\sphericalangle(\vec{AB},\vec{BC}) = \mathcal{L}$ și că unghiul $\sphericalangle(\vec{BC},\vec{CD}) = \mathcal{T} - \mathcal{L}$. Acum din (1) și (2) prin ridicare la pătrat și adunare găsim:

$$AC^2 + BD^2 = a^2+b^2 + 2ab\cos\mathcal{L} + b^2 + a^2 + 2ab\cos(\mathcal{T} - \mathcal{L})$$

$AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$, întrucît

$\cos\mathcal{L} + \cos(\mathcal{T} - \mathcal{L}) = 0$.

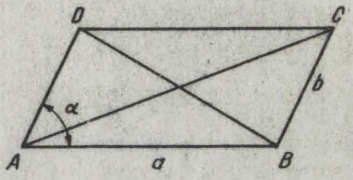


Fig.1.44.

31. 1) Fie triunghiul ABC din figură, pentru care putem scrie $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$, $\sphericalangle(\vec{BA},\vec{AC}) = \mathcal{T} - A$. Făcînd produsul scalar al lui $\vec{BC}$ cu el însuși, avem

$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2\vec{BA}.\vec{AC}$ sau

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

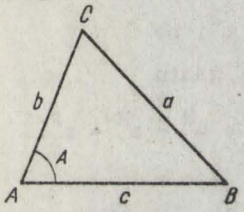


Fig.1.45.

2) α) Din teorema bisectoarei $\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$, folosind relația AD + DB = c, deducem $AD = \frac{bc}{a+b}$,

$DB = \frac{ac}{a+c}$. Cu aceste rezultate putem scrie

$$\vec{AD} = \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{\vec{c}}{c} = \frac{b\vec{c}}{a+b} = \frac{b(\vec{a}-\vec{b})}{a+b}$$

Acum mai scriem

$$\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD} = -\vec{b} + \frac{b(\vec{a}-\vec{b})}{a+b} = \frac{a\vec{b} + b\vec{a}}{a+b}$$ și

am găsit rezultatul cerut.

$$2)\,\beta)\ CD^2 = \vec{t}_c^{\,2} = \frac{2a^2b^2+2ab(\vec{a}.\vec{b})}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{2a^2b^2(1+\cos C)}{(a+b)^2};$$

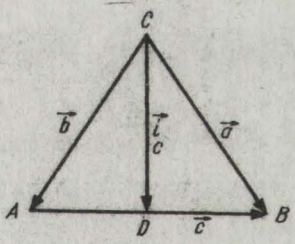


Fig.1.46.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$i_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$, dacă avem în vedere formula

$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

3) Fie patrulaterul ABCD și notațiile din figură. Fie xOy un reper la care raportăm acest patrulater; avem:

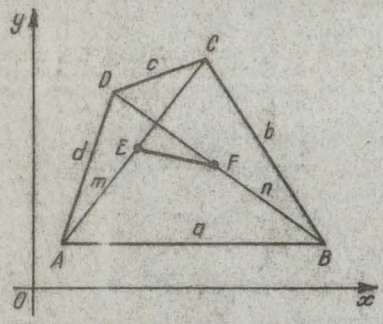


Fig.1.47.

$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}$; $\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}{2}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{EO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$;

$2\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) =$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (1)

Pentru comoditate alegem O = D

Cu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$ și

$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$ relația (1) se scrie:

$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$; de aici deducem

$4EF^2 = n^2 + d^2 + c^2 - 2\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$

Dacă înlocuim, după ex.18.2), pe $2\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA}$ cu $d^2 + n^2 - a^2$, pe $2\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ cu $c^2 + n^2 - b^2$ și pe $2\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$ cu $d^2 + c^2 - m^2$, găsim

$4EF^2 = a^2 + c^2 + d^2 - n^2 + b^2 - m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2$.

Pentru $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{0}$ regăsim teorema paralelogramului.

4) Fie AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{DB}$.

Avem $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$ sau

$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

Avem apoi $m^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\measuredangle C$ și

$m^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\measuredangle C$

Dacă între acesre relații eliminăm pe $\cos\measuredangle C$, găsim

$m^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$ (1)

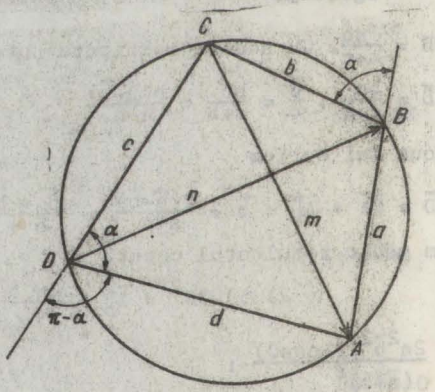


Fig.1.48.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Analog procedăm şi pentru $\overline{n}$; găsim

$$(2) \qquad n^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$$

Din (1) şi (2) prin multiplicare şi extragerea de rădăcini pătrate obţinem prima teoremă a lui Ptolemeu,

$$mn = ac + bd,$$

iar prin împărţire şi extragerea rădăcinii pătrate deducem a II-a teoremă a lui Ptolemeu

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

32. 1) α) Cu notaţiile vectoriale putem scrie:

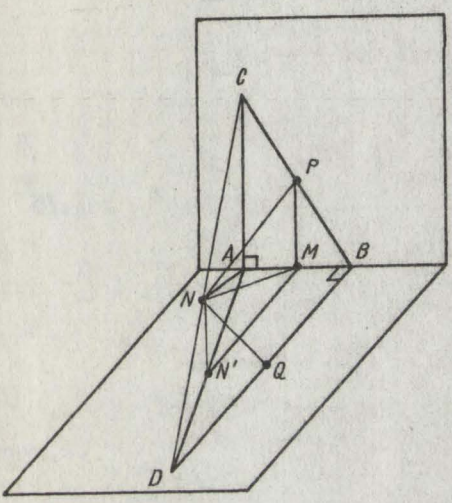


Fig.1.49.

$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AN} = \frac{\overline{BA}}{2} + (\frac{\overline{AC}}{2} + \frac{\overline{AD}}{2}) =$

$= \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}$; acum avem

$\overline{MN}.\overline{AB} = \frac{\overline{BC}.\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AD}.\overline{AB}}{2} =$

$= -\frac{\overline{BA}.\overline{BC}}{2} + \frac{\overline{AB}.\overline{AD}}{2} = -\frac{BA^2}{2} +$

$+ \frac{AB^2}{2} = 0.$

Am folosit proprietatea produsului scalar, care afirmă că produsul scalar a 2 vectori este egal cu modulul unui vector înmulţit cu proiecţia celuilalt vector pe primul!

Deci $\overline{MN} \perp \overline{AB}$.

β) Cu notaţii vectoriale scriem (N' este mijlocul lui DA):

$\overline{NP} = \overline{NN'} + \overline{N'M} + \overline{MP}$. Apoi facem produsul scalar şi găsim:

$$\overline{NP}.\overline{CB} = \overline{NN'}.\overline{CB} + \overline{N'M}\,\overline{CB} + \overline{MP}.\overline{CB} = (\overline{NN'} + \overline{MP})\overline{CB} = \overline{0}.\overline{CB} = 0$$

Deci $\overline{NP} \perp \overline{CB}$.

γ) Avem $\overline{NQ} = \overline{NP} + \overline{PB} + \overline{BQ}$. Facem produsul scalar şi obţinem

$$\overline{NQ}.\overline{BD} = (\overline{NP} + \overline{PB} + \overline{BQ})\overline{BD} = (\underbrace{\overline{NP} + \overline{BQ}}_{\overline{0}})\overline{BD} + \underbrace{\overline{PB}.\overline{BD}}_{0} = 0$$

Rezultă $\overline{NQ} \perp \overline{BP}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Consecinţă: NC = NB = ND = NA. Deci punctele C, B, D, A se află pe o aceeaşi sferă, punctul N fiind centrul ei.

2) α) Proprietăţile din enunţ se mai scriu

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ şi $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ (2)

Relaţia (1) o mai scriem şi aşa:

$$\begin{aligned} 0 = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}) &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BD} = \\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BD} = \\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}) = \\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = \\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} \\ &= 0, \text{ adică } \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

β) Avem

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ AB^2 = AD^2 + DB^2 + 2\,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} \\ CD^2 = CA^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD} \end{cases}$$

Acum prin adunare, rezultă:

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= 2\,AD^2 + CA^2 + DB^2 + 2\,\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA}) \\ &= CA^2 + BD^2 + 2\,\overrightarrow{AD}(\underbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}}_{\overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{CA}) \\ &= CA^2 + BD^2 + 2\,\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \\ &= CA^2 + BD^2 + 2\,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} \\ &= CA^2 + BD^2 \text{ etc.} \end{aligned}$$

3) Se deduce imediat că

$$\overrightarrow{OG} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH})$$

Avem apoi:

(1) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AH} = \lambda\,\overrightarrow{OA}_1 = \lambda(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Înălţimile $\triangle ABC$ fiind concurente, relaţia (1) e simetrică în $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Rezultă $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Avem mai departe: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(2\,\overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. In continuare obţinem: $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

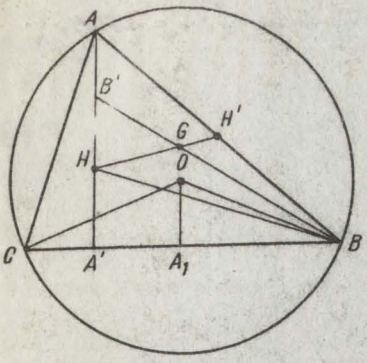


Fig.1.5o.

Cu notaţia CG = d, găsim

$$d^2 = \frac{4}{9}(R^2 + a^2 + b^2 - c^2)$$

Evident d = O, dacă $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{O}$, adică dacă $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Din această ultimă relaţie, pe baza exerciţiului 19.2, deducem $C = 12o^o$. Din $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ rezultă $\hat{B} = \hat{A} = 3o^o$.

Observaţie. Din condiţia $d^2 \geq O$, găsim inegalitatea interesantă

$$c^2 \leq R^2 + a^2 + b^2$$

33. 1) Fie $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{c}_1 = \overrightarrow{OC}_1$ şi $\vec{b}_1 = \overrightarrow{OB}_1$. Vom arăta că $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC} = O$. Avem $\vec{c}_1 = \vec{b} + \overrightarrow{BC}_1$, $\vec{c}_1 = \vec{a} + \overrightarrow{AC}_1$, de unde $2\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{BC}_1 + \overrightarrow{AC}_1$. Dar după enunţ $\overrightarrow{AC}_1 = \frac{3}{2}\overrightarrow{C_1B}$; deci $2\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{BC}_1 + \frac{3}{2}\overrightarrow{C_1B} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{\overrightarrow{C_1B}}{2} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{5}(\vec{b}-\vec{a}) = \frac{4\vec{a} + 6\vec{b}}{5}$, respectiv $\vec{c}_1 = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5}$. Analog găsim $\vec{b}_1 = \frac{14\vec{a} + 3\vec{c}}{17}$. Dacă avem în vedere coliniaritatea lui $\overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{OC}_1$, respectiv $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OB}_1$, putem scrie $\vec{c}_1 = \alpha\vec{c}$ şi $\vec{b}_1 = \beta\vec{b}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Inlocuind pe $\vec{c}_1$ şi $\vec{b}_1$ rezultă relaţiile:

$$(1) \qquad \frac{2\vec{a}}{5} + \frac{3\vec{b}}{5} - \alpha\vec{c} = \vec{O} \quad \text{şi} \quad \frac{14\vec{a}}{17} - \beta\vec{b} + \frac{3}{17}\vec{c} = \vec{O}$$

care ne dau

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{14}{17}} = \frac{\frac{3}{5}}{\beta} = -\frac{17\alpha}{3}$$

respectiv $\alpha = -\frac{3}{35}$ şi $\beta = -\frac{21}{17}$. Acum scriind că triunghiul dat este echilateral, i.e. (2) $(c-a)^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{c}-\vec{b})^2$ şi înlocuind în (2) pe $\vec{b}$ dedus din relaţia (1) i.e. $\vec{b} = -\frac{14\vec{a} + 3\vec{c}}{21}$, găsim

$$1554\vec{a}\vec{c} = 9(49a^2 - 27c^2) \quad \text{şi} \quad 1o92\vec{a}\vec{c} = -16(49a^2 - 27c^2),$$

care ne arată că $\vec{a}\cdot\vec{c} = O$, adică $\vec{a} \perp \vec{c}$ sau $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Fie $\vec{e}_i$ versorii axelor determinate de d_i, $i = 1,2,3$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ şi $B_i = Pr_{d_i} B$. Avem

$$\overrightarrow{AB}_1 = (\vec{a}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1$$

$$\overrightarrow{AB}_2 = (\overrightarrow{AB}_1\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{AB}_3 = (\overrightarrow{AB}_2\cdot\vec{e}_3)\vec{e}_3$$

Rezultă că $\overrightarrow{AB}_3 = (\vec{a}\vec{e}_1)(\vec{e}_1\vec{e}_2)(\vec{e}_2\vec{e}_3)\vec{e}_3$

Analog găsim $\overrightarrow{AC}_1 = (\vec{a}\vec{e}_3)(\vec{e}_3\vec{e}_2)(\vec{e}_2\vec{e}_1)\vec{e}_1$

Acum $\overrightarrow{C_1B_3} = \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AB_3} = \overrightarrow{AB_3} - \overrightarrow{AC_1}$ şi

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C_1B_3} = \vec{a}\cdot(\vec{e}_1\vec{e}_2)(\vec{e}_2\vec{e}_3)\left(\vec{a}\,\vec{e}_1\right)\vec{e}_3 - (\vec{a}\vec{e}_3)\vec{e}_1\Big) = 0$$

Deci $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{C_1B_3}$.

34. 1) Fie $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$; $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB} \leftrightarrow (\vec{a}-\vec{r})(\vec{b}-\vec{r}) = 0$,

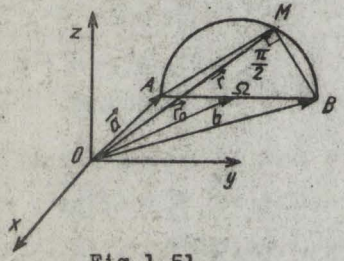


Fig.1.51.

$\vec{a}\cdot\vec{b} + r^2 - \vec{r}(\vec{a}+\vec{b}) = 0$ sau

$(\vec{r} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2})^2 = (\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2})^2$ sau

$(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = R^2$.

Astfel, locul geometric e o sferă cu centrul în punctul de vector de poziţie $\vec{r}_0 = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ şi raza $R = \left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|$

fiindcă toate calculele de mai sus se pot face şi în sens invers.

2) Conform enunţului avem $\frac{MA}{MB} = k$. Se ştie că pe dreapta AB există două puncte care împart segmentul AB în raportul dat k, unul C interior şi altul D exterior segmentului. Evident aceste puncte aparţin locului. Fie $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$ şi $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$. Am văzut că $\overrightarrow{MC} = \frac{\vec{a}+k\vec{b}}{1+k}$, $1+k \neq 0$, analog găsim $\overrightarrow{MD} = \frac{\vec{a}-k\vec{b}}{1-k}$, $1-k \neq 0$; acum $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = \frac{a^2-k^2b^2}{1-k^2} = 0$. Deci $\overrightarrow{MC}\perp\overrightarrow{MD}$. Deci M descrie o sferă de diametru CD.

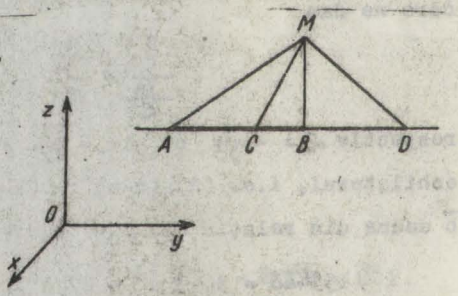


Fig.1.52.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Reciproc, fie M un punct al acestei sfere. Din $\overline{MC}\cdot\overline{MD} = 0$ rezultă $\frac{a}{b} = k$, adică M are proprietatea din enunţ.

Observaţie. Pentru k = 1 locul geometric este planul mediator al segmentului AB. Pentru k = 0 obţinem punctul A, iar pentru $k \to \infty$ punctul $M \longrightarrow B$ (punctele limită ale lui Poncelet)

3) $\mathcal{L}$) In triunghiul RA_1A_3 avem OR = mediană; deci

$$OR^2 = \frac{d_1^2 + d_3^2}{2} - \frac{A_1A_3^2}{4}$$

Analog din $\triangle RA_2A_4$ obţinem

$$OR^2 = \frac{d_2^2 + d_4^2}{2} - \frac{A_2A_4^2}{4}$$

Cum $A_1A_3 = A_2A_4$, rezultă relaţia cerută la α).

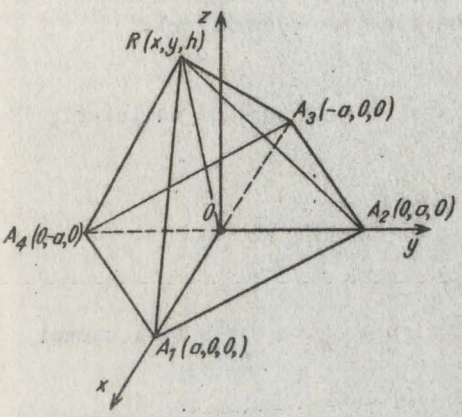


Fig.1.53.

β) In coordonate putem scrie

$d_1^2 = (x-a)^2 + y^2 + h^2$, $d_2^2 =$

$= x^2 + (y-a)^2 + h^2$,

$d_3^2 = (x+a)^2 + y^2 + h^2$,

$d_4^2 = x^2 + (y+a)^2 + h^2$

De aici deducem

(1) $(d_3^2 - d_1^2)^2 + (d_4^2 - d_2^2)^2 = 16a^2(x^2+y^2)$, iar din relaţia de la α) găsim $4(x^2 + y^2) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - 4a^2 - 4h^2$ (2)

Eliminînd pe $4(x^2+y^2)$ între (1) şi (2) se obţine h^2 cerut la β)

§ 1.3. Produsul vectorial a doi vectori

1.3.1. Rezumat teoretic

1. Definiţie. Numim produs vectorial al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ un vector $\vec{c}$, caracterizat de proprietăţile:

1) $c = ab \sin(\vec{a},\vec{b})$

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ şi $\vec{c} \perp \vec{b}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Triedrul $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ constituie un triedru drept (vedeţi figura alăturată.

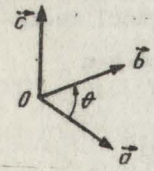


Fig.1.54.

Produsul vectorial (pv) se notează $\vec{a} \times \vec{b}$, $[\vec{a},\vec{b}]$, $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

2. <u>Proprietăţi</u>. 1) $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$, $\forall \vec{a},\vec{b} \in V$, (pv este anticomutativ).

2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ (pv e distributiv faţă de adunarea vectorilor).

3) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\forall \vec{a} \in V$

4) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ şi $ab \neq 0 \Longleftrightarrow \vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt vectori coliniari, i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

5) pv nu e asociativ.

6) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$; $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$; $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

7) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

8) Dacă $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ şi $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, atunci

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$ (expresia analitică a produsului vectorial)

9) Interpretarea geometrică a pv: modulul produsului vectorial este egal cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori (sau dublul ariei triunghiului construit pe cei doi vectori sau $\vec{a} \times \vec{b}$ este vectorul - arie a paralelogramului construit pe $\vec{a}$ şi $\vec{b}$).

10) <u>Teorema lui Lami</u>: Dacă un punct material este în echilibru sub acţiunea a trei forţe de mărimi F_1, F_2, F_3, atunci avem:

$$F_1 : F_2 : F_3 = \sin(\vec{F}_2, \vec{F}_3) : \sin(\vec{F}_3, \vec{F}_1) : \sin(\vec{F}_1, \vec{F}_2).$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

1.3.2. Exerciţii

35. 1) Să se verifice identităţile

α) $(\vec{d}-\vec{a})\times(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{d}-\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{d}-\vec{c})\times(\vec{a}-\vec{b})=$

$=-2(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}),\ \forall\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in V.$

β) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=2\,\vec{b}\times\vec{a},\ \forall\vec{a},\vec{b}\in V.$

2) Să se arate că

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{w})=\vec{u}^2(\vec{v}\cdot\vec{w})-(\vec{u}\cdot\vec{v})(\vec{u}\cdot\vec{w}),$$

$\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$

3) Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trei vectori care au aceeaşi origine comună, ei fiind necoplanari.

Să se arate că vectorul

$$\vec{s}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$$

este perpendicular pe planul determinat de vîrfurile vectorilor $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

36. 1) Fie $\vec{a}=(1,-2,3)$ şi $\vec{b}=(4,3,6)$

Se cere $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$.

2) Fie A(1, 2, 0), B(-1, 0, 3), C(2, 1, -1) vîrfurile unui triunghi ABC. Se cere aria lui şi lungimea înălţimii h_a corespunzătoare vîrfului A.

3) Fie ABC un triunghi oarecare şi $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$. Să se verifice identitatea

$$\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\times\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right)=\frac{3}{4}\,\vec{a}\times\vec{b}$$

şi să se interpreteze geometric.

37. 1) Să se afle aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ şi $\vec{b}=-3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

2) Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi şi $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ vectorii de poziţie ai vîrfurilor lui.

Atunci vectorul-arie a triunghiului este

$$\vec{s}=\frac{1}{2}(\vec{r}_1\times\vec{r}_2+\vec{r}_2\times\vec{r}_3+\vec{r}_3\times\vec{r}_1)$$

Cda. 236/987 Fasc. 4

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Fie (d_1) și (d_2) două drepte paralele în $\mathbb{R}^3$. Să se demonstreze că distanța d dintre ele se poate exprima cu formula

$$d = \frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{|\vec{r}_2|},$$

în care $\vec{r}_1$ este vectorul de poziție al unui punct de pe dreapta (d_2) în raport cu un punct de pe dreapta (d_1), iar $\vec{r}_2$ un vector director al dreptelor respective.

38. (O identitate a lui Lagrange). Fie doi vectori $\vec{a}, \vec{b}$ din $\mathbb{R}^3$. Atunci avem

$$(1) \qquad (\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$$

sau

$$(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 +$$

$$+ (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

dacă

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3) \text{ și } \vec{b} = (b_1,b_2,b_3).$$

39. 1) Dacă vectorii $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ și $\vec{a}_3$ formează un triunghi atunci $\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ (1) și reciproc.

Deduceți de aici teorema sinusurilor.

2) Fie în plan versorii ortogonali $\vec{a}(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ și $\vec{b}(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$. Atunci vectorii $\vec{A}(a_1,b_1)$ și $\vec{B}(a_2,b_2)$ sînt și ei versori ortogonali.

4o. 1) Vîrfurile patrulaterului ABCD au coordonatele A(-1, 2, -2), B(-2, 5, 1), C(-1, 6, 0), D(2, 3, -6). Să se arate că acest patrulater este plan și să se afle aria lui.

2) Fie punctele A(2, 3, -1), B(1, 3, 4), C(2, 0, 2) din $\mathbb{R}^3$. Să se afle

α) Proiecțiile vectorilor $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ și $\vec{AC}$ pe axe

β) AB, BC, CA.

γ) Unghiurile pe care le face $\vec{AB}$ cu axele de coordonate;

δ) $\vec{OA}.\vec{OB}$, $\vec{OB}.\vec{OC}$, $\vec{OA}.\vec{OC}$.

ε) $\vec{OA} \times \vec{OB}$, $\vec{OB} \times \vec{OC}$, $\vec{OA} \times \vec{OC}$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

φ) Aria[ABC];

3) α) Fie $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ patru vectori din V, pentru care

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} \text{ şi } \vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$$

Demonstraţi că $\vec{a} - \vec{d} = \alpha(\vec{b} - \vec{c})$

β) Din $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$, putem scrie $\vec{a} = \vec{b}$? Dar din $\vec{a} \times \vec{y} = \vec{b} \times \vec{y}$, pentru $\forall \vec{y} \in V$, putem deduce $\vec{a} = \vec{b}$?

γ) Demonstraţi că punctele

A(3,2,-1), B(2,4,2), C(0,8,8) sînt în linie dreaptă.

41. (<u>Formula lui Heron din Siracuza</u>). Să se stabilească pe cale vectorială formula care dă aria unui triunghi în funcţie de laturi şi anume:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),\ 2p = a + b + c.$$

1.3.3. <u>Rezolvarea exerciţiilor</u>

35. 1) α), β). Verificarea este imediată.

2) Pornim de la proprietatea

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

şi ridicăm această egalitate la pătrat.

Pe baza relaţiei $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$, găsim

$$\vec{u}^2 \cdot (\vec{v} + \vec{w})^2 - [\vec{u}(\vec{v} + \vec{w})]^2 = (\vec{u} \times \vec{v})^2 + (\vec{u} \times \vec{w})^2 +$$
$$+ 2(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \text{ sau,}$$

cu notaţia $P := (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$,

$$\vec{u}^2(\vec{v}^2 + \vec{w}^2 + 2\,\vec{v}.\vec{w}) - (\vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w})^2 = \vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2 +$$
$$+ \vec{u}^2 \cdot \vec{w}^2 - (\vec{u} \cdot \vec{w})^2 + 2.P \text{ sau}$$
$$\vec{u}^2.\vec{v}^2 + \vec{u}^2.\vec{w}^2 + 2\vec{u} \cdot (\vec{v}.\vec{w}) - (\vec{u}.\vec{v})^2 - (\vec{u}.\vec{w})^2 - 2(\vec{u}.\vec{v})(\vec{u}.\vec{w}) =$$
$$= \vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2 + \vec{u}^2 \cdot \vec{w}^2 - (\vec{u}.\vec{w})^2 + 2P.$$

Rămîne $P = \vec{u}^2\,(\vec{v}.\vec{w}) - (\vec{u}.\vec{v})(\vec{u}.\vec{w})$

3) Este suficient să verificăm că

$$\vec{s}.(\vec{b} - \vec{a}) = 0 \text{ şi } \vec{s}(\vec{b} - \vec{c}) = 0, \text{ căci}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$\vec{b} - \vec{a}$ şi $\vec{b} - \vec{c}$ determină planul despre care e vorba în problemă.

36. 1) Rezultă imediat:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} = (5,1,9);$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k} = (-3, -5, -3);$$

$$\vec{a}.\vec{b} = 1.4 + (-2).3 + 3.6 = 16;$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+\vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -21\,\vec{i} + 6\vec{j} + 11\,\vec{k}.$$

2) Calculăm $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} =$

$= -2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ şi $\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$. După interpretarea geometrică a produsului vectorial, aria-vector a triunghiului ABC se scrie

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix};$$ modulul S al acestui vector

va fi aria căutată.

$$S = \frac{\sqrt{25+1+16}}{2} = \frac{\sqrt{42}}{2}$$ unităţi de arie sau $S = \frac{\sqrt{42}}{2}$ u.a.

Apoi avem

$$S = \frac{BC.h_a}{2} = \frac{\sqrt{3^2+1^2+4^2}.h_a}{2} = \frac{\sqrt{26}.h_a}{2} = \frac{\sqrt{42}}{2};$$

deci

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$h_a = \sqrt{\frac{42}{26}} = \sqrt{\frac{21}{13}}$ unităţi de lungime sau $h_a = \sqrt{\frac{21}{13}}$ u.l.

3) Verificarea este imediată:

$$(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2})\times(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}) = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{2} - \frac{\vec{b}\times\vec{a}}{4} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{2} + \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{4} = \frac{3}{4}\,\vec{a}\times\vec{b}.$$

Această egalitate exprimă proprietatea cunoscută a unui triunghi, conform căreia aria triunghiului format cu medianele acestuia este egală cu trei pătrimi din aria triunghiului.

37. 1) Conform cu interpretarea geometrică a produsului vectorial, avem $S = |\vec{a}\times\vec{b}|$. Dar

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$$

Deci $S = \sqrt{2^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{54} \simeq 7{,}35$ u.a.

2) Vectorul - arie a triunghiului este jumătatea vectorului-arie a paralelogramului construit pe $\overrightarrow{A_1A_2}$ şi $\overrightarrow{A_1A_3}$. Deci

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = \frac{1}{2}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\times(\vec{r}_3-\vec{r}_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{r}_2\times\vec{r}_3 - \vec{r}_2\times\vec{r}_1 - \vec{r}_1\times\vec{r}_3 + \vec{r}_1\times\vec{r}_1\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{r}_1\times\vec{r}_2 + \vec{r}_2\times\vec{r}_3 + \vec{r}_3\times\vec{r}_1).$$

3) Exprimăm (vedeţi figura alăturată) aria $\triangle ABC$ în două moduri diferite şi obţinem

$$\frac{|\vec{r}_2|\cdot d}{2} = \frac{1}{2}|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|, \text{ de unde}$$

$$d = \frac{|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|}{|\vec{r}_2|}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

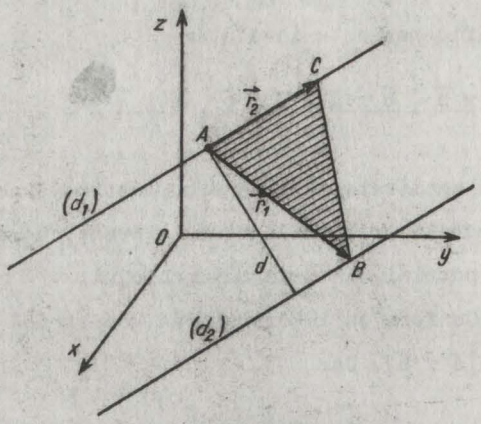


Fig.1.55.

38. Folosind definiţiile produsului scalar şi a celui vectorial, relaţia se stabileşte imediat.

39. 1) Să presupunem că vectorii $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ formează un triunghi; atunci evident $a_1+a_2+a_3=0$; de aici prin înmulţire vectorială cu $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$, găsim

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_3 + \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0} \text{ şi } \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \times \vec{a}_2 = \vec{0}.$$

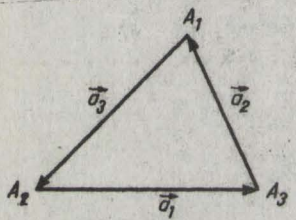


Fig.156.

Aceste două relaţii, rearanjate, folosind anticomutativitatea produsului vectorial, ne permit să scriem

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 \qquad (1)$$

şi am găsit relaţiile (1).

Fie şirul de egalităţi (1) adevărat. Inmulţind, de pildă $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ scalar cu $\vec{a}_3$, găsim $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = (\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_3) = 0$. Dar aceasta înseamnă că $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ sînt 3 vectori coplanari, i.e.

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{3} |\lambda_i| \neq 0, \text{ a.î. } \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{0} \qquad (2)$$

Dacă în (2) înmulţim vectorul cu $\vec{a}_1$ şi apoi cu $\vec{a}_2$, găsim $\lambda_2\vec{a}_2 \times \vec{a}_1 + \lambda_3\vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = \vec{0}$, $\lambda_1\vec{a}_2 \times \vec{a}_1 + \lambda_3\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \vec{0}$ sau

$$\frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\lambda_3} = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\lambda_1} = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\lambda_2}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

De aici rezultă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 (= \lambda)$. Inlocuind pe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ în (2) și observînd că $\lambda \neq 0$, avem $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$, relație ce exprimă faptul că $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ formează un triunghi.

Teorema sinusurilor se obține imediat. In adevăr, dacă egalitatea (1) o scriem pentru module, aceasta devine $a_2a_3 \sin A_1 = a_3a_1 \sin A_2 = a_1a_2 \sin A_3$ sau $\frac{\sin A_1}{a_1} = \frac{\sin A_2}{a_2} = \frac{\sin A_3}{a_3}$, care este tocmai teorema sinusurilor într-un triunghi oarecare $A_1A_2A_3$.

2) Folosim identitatea precedentă a lui Lagrange pentru acest caz:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2;$$

ea ne dă

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1.$$

Fie de pildă (1) $a_1b_2 - a_2b_1 = 1$; considerăm și condiția de ortogonalitate pentru $\vec{a}$ și $\vec{b}$; $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ (2)

Din (1) și (2) aflăm necunoscutele a_1 și a_2

$$a_1 = \frac{b_2}{b_1^2 + b_2^2}, \qquad a_2 = -\frac{b_1}{b_1^2 + b_2^2}$$

In fond $b_2 = a_1$ și $a_2 = -b_1$. (3)

Inlocuind acum pe b_2 cu a_1 și pe a_2 cu $-b_1$ în (1), găsim $a_1^2 + b_1^2 = 1$; înlocuind tot acolo pe b_1 cu $-a_2$ și pe a_1 cu b_2, deducem $b_2^2 + a_2^2 = 1$. Ortogonalitatea lui $\vec{A}$ și $\vec{B}$ rezultă din (3):

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

4o. 1) Calculăm $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) = 2(3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$ și $\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC} = (-3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}) \times (-3\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}) = -6(3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$. Rezultă că planele [ABC] și [DAC] au același vector normal.

Deci patrulaterul ABCD este plan.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Acum aria sa $S = \frac{1}{2}|\vec{BA} \times \vec{BC}| + \frac{1}{2}|\vec{DA} \times \vec{DC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{9+1+4} +$

$+ \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{9+1+4} = 4\sqrt{14}$ u.a.

2) α) $Pr_{Ox}\vec{AB} = x_B - x_A = -1$,

$Pr_{Oy}\vec{AB} = y_B - y_A = 0$,

$Pr_{Oz}\vec{AB} = z_B - z_A = 5$.

$(\vec{BC})_{Ox} = x_C - x_B = 1$; $(\vec{BC})_{Oy} = y_C - y_B = -3$;

$(\vec{BC})_{Oz} = z_C - z_B = -2$;

$\vec{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k} = -3\vec{j} + 3\vec{k}$;

deci

$$Pr_{Ox}\vec{AC} = 0,\ Pr_{Oy}\vec{AC} = -3 \text{ și } Pr_{Oz}\vec{AC} = 3.$$

β) $AB = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{26}$; $BC = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} =$

$= \sqrt{14}$; $AC = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}$.

γ) $\vec{AB} \cdot \vec{i} = AB \cdot 1 \cdot \cos\alpha$; $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$;

$\vec{AB} \cdot \vec{j} = AB \cdot 1 \cdot \cos\beta$; $\cos\beta = 0$;

$\vec{AB} \cdot \vec{k} = AB \cdot 1 \cdot \cos\gamma$; $\cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

δ) $\vec{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{OC} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$;

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 7$;

$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 10$; $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 2$.

ε) $\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$;

$\vec{OB} \times \vec{OC} = 6(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$; $\vec{OA} \times \vec{OC} = 6(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$.

φ) $Aria\,[ABC] = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$;

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k};$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{15^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$$

$$\text{Aria}[ABC] = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ unităţi de arie.}$$

3) α) Calculăm $(\vec{a} - \vec{d}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{c} -$ $- (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{d} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{d}) - (\vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{d}) = \vec{0}$. De aici deducem coliniaritatea lui $\vec{a} - \vec{d}$ şi $\vec{b} - \vec{c}$, i.e. $\vec{a} - \vec{d} = \lambda(\vec{b} - \vec{c})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Nu. Din relaţie rezultă $(\vec{a}-\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{0}$, adică $\vec{c} = \lambda(\vec{a}-\vec{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Da. Fiindcă altfel ar rezulta ca $\vec{a} - \vec{b}$ să fie coliniar cu orice vector din V. Absurd.

γ) Afirmaţia rezultă din egalitatea $\overrightarrow{BC} = 2.\overrightarrow{AB}$.

41. Fie triunghiul din figură; după interpretarea geometrică a produsului vectorial, avem:

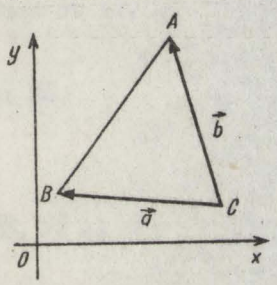


Fig.1.57.

$$2S = |\vec{a} \times \vec{b}|; \quad 4S^2 = (\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2b^2\sin^2 C =$$

$$= a^2b^2 - a^2b^2\cos^2 C = a^2b^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2.$$

Dar $(\vec{a}.\vec{b})^2 = a^2b^2 \cdot \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4}$;

deci $16S^2 = 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2$; cu $2p = a + b + c$, rezultă $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

§.1.4. Produsul mixt a trei vectori

1.4.1. Rezumat teoretic

1. Definiţie. Se numeşte produs mixt (pm) al vectorilor $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ numărul definit de produsul scalar dintre $\vec{a}$ şi vectorul $\vec{b} \times \vec{c}$. Deci

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Se mai notează $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ sau $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2. Proprietăţi: 1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$.

2) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{a}(\vec{c} \times \vec{b})$

3) $\vec{a}\vec{c}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}\vec{c} = \vec{c}\vec{b}\vec{a}$.

4) (Interpretarea geometrică a produsului mixt a trei vectori): modulul produsului mixt, i.e. $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, reprezintă volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

5) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sînt vectori coplanari, dacă doi din vectorii consideraţi sînt paraleli sau dacă unul din cei trei factori e nul.

6) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, (\vec{c}+\vec{d}))$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V$

1.4.2. Exerciţii

42. 1) Să se calculeze

α) $A = [(\vec{i}-\vec{j}) \times (\vec{i} + \vec{j})] \cdot \vec{k}$.

β) $B = \vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$

γ) $C = \vec{i}\vec{j}\,(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

2) Să se arate că

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} \cdot \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \cdot \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2} = \frac{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}{4}$$

3) Să se arate că

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}).(\vec{x}\vec{y}\vec{z}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{x} & \vec{a}\vec{y} & \vec{a}\vec{z} \\ \vec{b}\vec{x} & \vec{b}\vec{y} & \vec{b}\vec{z} \\ \vec{c}\vec{x} & \vec{c}\vec{y} & \vec{c}\vec{z} \end{vmatrix}$$

43. 1) (Volumul unui paralelipiped). Se cere volumul paralelipipedului construit pe vectorii

$\vec{OA} = (1,2,0)$, $\vec{OB} = (1, 4, 0)$, $\vec{OC} = (0, 1, 5)$ drept muchii.

2) Să se demonstreze că volumul unui tetraedru este egal cu o şesime din modulul produsului mixt format cu cei trei vectori - muchii, care nu aparţin unei feţe.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Fie A(1,1,2), B(2,3,0), C(0,1,1) şi D(-1,2,-3). Se cere:

α) produsul mixt $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

β) volumul tetraedrului ABCD.

γ) Înălţimea tetraedrului coborîtă din B pe baza ACD.

44. 1) Fie forţa $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$ şi axa z'z, caracterizată de versorul $\overrightarrow{CD}$. Să se demonstreze că momentul forţei $\vec{F}$ în raport cu axa z'z este de şase ori mai mare decît volumul tetraedrului ABCD.

2) In $\mathbb{R}^3$ se dau punctele A(a,a,0), B(o,2a,0), C(2a, 2a, 0) şi D(0, 2a, a).

Se cere:

α) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

β) AB, AC, vers $\overrightarrow{AB}$, cosinusurile unghiurilor pe care $\overrightarrow{AB}$ le face cu axele.

γ) Volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AD}$.

δ) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

ε) Aria totală A_t a paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AD}$.

45. 1) Să se decidă dacă vectorii

$\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (-1, -6, 2)$ şi $\vec{c} = (-3, 12, 6)$

sînt sau nu coplanari.

2) Fie patrulaterul ABCD, cu vectorii de poziţie ai vîrfurilor

$$\vec{r}_A = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{i} - \vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\vec{r}_C = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{r}_D = 6\vec{i} + 5\vec{j} + 10\vec{k}.$$

Să se arate că acest patrulater este plan şi să se determine aria lui.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

46. 1) (Vectori reciproci). Fie reperul $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{V} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$. Se numesc vectori reciproci ai vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectorii $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ definiţi astfel:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\mathcal{V}}, \quad \vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\mathcal{V}}, \quad \vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\mathcal{V}}$$

Să se arate că

α) $\vec{a}\vec{a}' = 1$, $\vec{a}\vec{b}' = 0$, $\vec{a}\vec{c}' = 0$

$\vec{b}\vec{a}' = 0$, $\vec{b}\vec{b}' = 1$, $\vec{b}\vec{c}' = 0$

$\vec{c}\vec{a}' = 0$, $\vec{c}\vec{b}' = 0$, $\vec{c}\vec{c}' = 1$.

β) $\mathcal{V}\mathcal{V}' = 1$, unde $\mathcal{V}' = (\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$.

γ) Reciprocii reciprocilor sînt vectorii iniţiali.

2) Să se afle vectorii reciproci ai vectorilor

α) $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (-3, 0, 2)$, $\vec{c} = (5, 1, -2)$ respectiv

β) $\vec{a} = \vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{k}+\vec{i}$; $\vec{c} = \vec{i}+\vec{j}$.

3) Să se decidă dacă vectorii

$$\vec{I} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$
$$\vec{J} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{K} = \vec{j} - 2\vec{k}$$

formează o bază în $\mathbb{R}^3$. In caz afirmativ, să se afle vectorii lor reciproci.

47. 1) Fie reperul direct $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ şi reperul reciproc asociat $(O, \vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$ în $\mathbb{R}^3$.

Fie $\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}$, (1), un vector din $\mathbb{R}^3$. Să se arate că

α) $\vec{u} = \frac{1}{\mathcal{V}}\left[(\vec{u},\vec{b},\vec{c})\vec{a} + (\vec{u},\vec{c},\vec{a})\vec{b} + (\vec{u},\vec{a},\vec{b})\vec{c}\right]$ (2)

β) $\vec{u} = (\vec{u}\vec{a}')\vec{a} + (\vec{u}\vec{b}')\vec{b} + (\vec{u}\vec{c}')\vec{c}$ (3)

γ) $\vec{u} = (\vec{u}\vec{a})\vec{a}' + (\vec{u}\vec{b})\vec{b}' + (\vec{u}\vec{c})\vec{c}'$. (4)

2) Aplicaţie. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \vec{x}\vec{a} = \alpha \\ \vec{x}\vec{b} = \beta; \ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \mathcal{V} \neq 0 \\ \vec{x}\vec{c} = \gamma \end{cases}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

48. 1) Stabiliţi proprietatea de distributivitate a produsului vectorial faţă de adunarea vectorilor, folosind distributivitatea produsului scalar faţă de adunarea vectorilor şi noţiunea de produs mixt a trei vectori.

2) Fie A_1, A_2, A_3 trei puncte din $\mathbb{R}^3$ de vectori de poziţie $\overrightarrow{OA}_1 = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{OA}_2 = \vec{r}_2$, $\overrightarrow{OA}_3 = \vec{r}_3$, situate într-un plan P, care nu trece prin O şi pentru care $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$. Atunci punctele A_1, A_2, A_3 sînt coliniare şi reciproc (vedeţi figura).

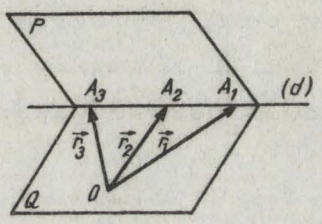


Fig.1.58.

1.4.3. Rezolvarea exerciţiilor

42. 1) α) Se găseşte imediat A = 2.

β) $B = \vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k} = 1$.

γ) $C = \vec{i}\vec{j}\,(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 1$.

2) Se scrie de pildă astfel: $\frac{1}{8}\,(\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c})$.

$$\cdot\,(\vec{a}+\vec{c}) = \frac{1}{8}(\underbrace{\vec{a}\vec{b}\vec{a}}_{0} + \underbrace{\vec{a}\vec{c}\vec{a}}_{0} + \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \underbrace{\vec{a}\vec{c}\vec{c}}_{0} + \underbrace{\vec{b}\vec{c}\vec{c}}_{0}) = \frac{1}{4}\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

3) Scriem cele două produse mixte sub formă de determinanţi şi înmulţim determinanţii linie pe linie.

Drept un caz particular interesant obţinem determinantul lui Gram:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

43. 1) După interpretarea geometrică a produsului mixt a trei vectori, avem

$$\mathcal{V} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 \text{ u.v. adică } \mathcal{V} = 10 \text{ unităţi de volum}$$

2) Rezultă din formula volumului paralelipipedului, dacă avem în vedere că aria bazei tetraedrului este de două ori mai mică, decît aria bazei paralelipipedului, că înălţimea este aceeaşi şi că volumul tetraedrului comportă un factor egal cu $\frac{1}{3}$.

3) α) Avem $\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + \ldots = (1,2,-2)$

$\vec{AC} = (-1, 0, -1)$; $\vec{AD} = (-2, 1, -5)$;

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -3$$

β) $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right| = \frac{1}{2}$ u.v.

γ) $\text{Aria}[ACD] = \frac{1}{2}\left|\vec{AC} \times \vec{AD}\right| = \frac{11}{2}$ u.a.; acum din

$V_{ABCD} = \text{aria}[ACD] \cdot \frac{h_B}{3}$ rezultă $h_B = \frac{3\sqrt{11}}{11}$ u.l.

44. 1) După definiţie avem

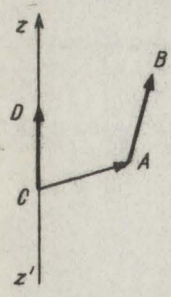


Fig.1.59.

$M_{z'z} = \vec{CD}(\vec{CA} \times \vec{AB}) = (\vec{CD}, \vec{CA}, \vec{AB})$.

Pe de altă parte se ştie că volumul tetraedrului ABCD este:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\vec{CD}(\vec{CA} \times \vec{CB})\right| = \frac{1}{6}\left|\vec{CD}(\vec{CA} \times [\vec{CA} + \vec{AB}])\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|\vec{CD}(\vec{CA} \times \vec{AB})\right|.$$

Deci $M_{z'z} = 6\,\mathcal{V}_{ABCD}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) α) $\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} = -a\vec{i} + a\vec{j}$;

$\vec{AC} = a\vec{i} + a\vec{j}$; $\vec{AD} = -a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}$.

β) $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $AD = a\sqrt{3}$;

vers $\vec{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$; dacă vers $\vec{AB} = \cos\alpha\vec{i} +$

$+ \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$, atunci $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, și $\cos\gamma = 0$, adică

$\alpha = 135^0$, $\beta = 45^0$, $\gamma = 90^0$.

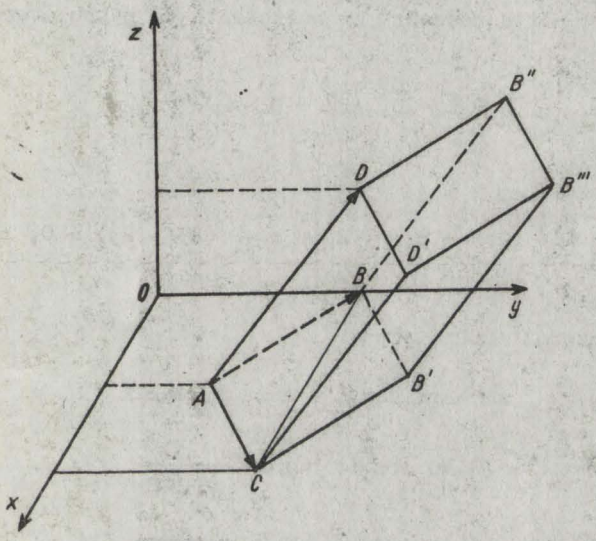


Fig.1.6o.

γ) $vol(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \left|\begin{vmatrix} -a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix}\right| = |-2a^3| = 2a^3$.

δ) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -a^2 + a^2 = 0$; deci $\vec{AB} \perp \vec{AC}$.

ε) $A_t = 2(A_{ABB'C} + A_{ACD'D} + A_{ABB''D})$;

$A_{ABB'C} = AC \cdot AB = 2a^2$;

$A_{ACD'D} = |\vec{AC} \times \vec{AD}|$; $\vec{AC} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix} =$

$= a^2\vec{i} - a^2\vec{j} + 2a^2\vec{k}$; $|\vec{AC} \times \vec{AD}| = a^2\sqrt{6}$;

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$A_{ABB''D} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|;\ \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix} =$$

$$= a^2\vec{i} + a^2\vec{j};\ |\vec{AB} \times \vec{AD}| = a^2\sqrt{2}.$$

Deci $A_t = a^2(2 + \sqrt{6} + \sqrt{2})$ u.a.

45. 1) Vectorii sînt coplanari fiindcă $\vec{abc} = 0$.

2) O condiţie necesară şi suficientă ca patrulaterul ABCD să fie plan este

$$P = (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$$

Cum

$$P = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -2\,(23 - 23) = 0,$$

rezultă că patrulaterul ABCD e plan.

$$\text{Aria} = \frac{AB \cdot AC \sin\theta}{2} + \frac{AC \cdot AD \sin\varphi}{2}$$

$$\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC \cos\theta;\ \cos\theta = \frac{-12}{2\sqrt{42}}$$

$$\vec{AC}.\vec{AD} = AC.AD \cos\varphi;\ \cos\varphi = \frac{24}{10\sqrt{6}}$$

Acum $\sin\theta = \frac{24}{\sqrt{168}}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{600}}$

şi

$$\text{Aria} = \frac{\sqrt{14}.2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{24}}{2\sqrt{42}} + \frac{2\sqrt{3}.5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{600}} = 24 \text{ u.a.}$$

Altfel:

$$\text{Aria} = \tfrac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| + \tfrac{1}{2}|\vec{AC} \times \vec{AD}|.$$

Insă $\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{AC} \times \vec{AD} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ şi avem $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{24}$. Etc.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

46. 1) $\mathcal{L}$) Folosim proprietăţile produsului mixt şi obţinem imediat relaţiile de la $\mathcal{L}$).

β) Avem (folosind formula lui Gibbs):

$$\vec{a}' \times \vec{b}' = \frac{(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})}{v^2} = \frac{\vec{c}[(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a}] - \vec{a}[(\vec{b} \times \vec{c})\vec{c}]}{v^2} = \frac{\vec{c}}{v};$$

acum avem

$$v' = (\vec{a}' \times \vec{b}').\vec{c}' = \frac{\vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b})}{v^2} = \frac{1}{v}, \text{ adică}$$

$$vv' = 1$$

γ) Fie $\vec{a}''$ vectorul recirpoc al lui $\vec{b}'$ şi $\vec{c}'$. Avem

$$\vec{c}'' = \frac{\vec{a}' \times \vec{b}'}{v'} = \frac{\vec{c}}{vv'} = \vec{c}. \text{ Etc.}$$

2) $\mathcal{L}$) Verificăm necoplanaritatea vectorilor daţi:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Avem apoi

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{3} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{3} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{3} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \vec{k}.$$

β) Procedeu analog:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0;$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{2} = \frac{(\vec{i}+\vec{k}) \times (\vec{i}+\vec{j})}{2} = \frac{1}{2}(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{2} = \frac{(\vec{i}+\vec{j})(\vec{j}+\vec{k})}{2} = \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{2} = \frac{(\vec{j}+\vec{k}) \times (\vec{k}+\vec{i})}{2} = \frac{1}{2}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}).$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Intrucît $\vec{I}\vec{J}\vec{K} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, rezultă că $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$.

Avem apoi:

$$\vec{I}' = \frac{\vec{J} \times \vec{K}}{-12} = \frac{-3\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{-12};$$

$$\vec{J}' = \frac{\vec{K} \times \vec{I}}{-12} = \frac{2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}}{12}$$

$$\vec{K}' = \frac{\vec{I} \times \vec{J}}{-12} = \frac{-5\vec{i} + 14\vec{j} + 13\vec{k}}{-12}$$

47. 1) α) In (1) înmulţim scalar cu $\vec{b} \times \vec{c}$. Rezultă $\vec{u}(\vec{b}\times\vec{c}) = u_1 \cdot v$.

Deci $u_1 = \frac{1}{v}(\vec{u},\vec{b},\vec{c})$. Analog se obţine $u_2 = \frac{1}{v}(\vec{u},\vec{c},\vec{a})$ şi $u_3 = \frac{1}{v}(\vec{u},\vec{a},\vec{b})$. Inlocuind în (1), găsim (2)

β) Avînd în vedere că $\frac{1}{v}(\vec{u},\vec{b},\vec{c}) = \vec{u}\cdot\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{v} = \vec{u}\vec{a}'$ şi analoagele, formula (2) trece în (3).

γ) Dacă înlocuim reperul direct cu cel reciproc şi invers, rezultă (4).

2) Fie $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ vectorii reciproci ai vectorilor $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ Am văzut că:

$$\vec{x} = (\vec{x}\vec{a})\vec{a}' + (\vec{x}\vec{b})\vec{b}' + (\vec{x}\vec{c})\vec{c}'.$$

Deci

$$\vec{x} = \alpha\vec{a}' + \beta\vec{b}' + \gamma\vec{c}' \qquad \text{sau}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{v}\left[\alpha(\vec{b}\times\vec{c}) + \beta(\vec{c}\times\vec{a}) + \gamma(\vec{a}\times\vec{b})\right]$$

(soluţie unică!)

48. 1) Trebuie să arătăm că $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$.

Fie, pentru aceasta, $\vec{u} = \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ şi $\vec{v} = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$. Fie $\vec{A}$ un vector arbitrar nenul din $\mathbb{R}^3$. Avem:

$$\vec{A}\vec{u} = \vec{A}(\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})) = (\vec{A}\times\vec{a})(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{A}\times\vec{a})\cdot\vec{b} + (\vec{A}\times\vec{a})\vec{c} =$$
$$= \vec{A}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) + \vec{A}(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{A}\cdot(\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}) = \vec{A}\cdot\vec{v},\ \forall\vec{A}\in\mathbb{R}^3.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Rezultă $\bar{u} = \bar{v}$, ceea ce trebuia demonstrat.

2) " $\Longrightarrow$ " Fie $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) = 0$; cum vectorii $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ au un punct comun O, rezultă că ei se află într-un plan Q, care trece prin O. Întrucât $A_1, A_2, A_3 \in P$, rezultă că $A_1, A_2, A_3 \in d = P \cap Q$.

" $\Longleftarrow$ ". Fie A_1, A_2, A_3 coliniare. Atunci $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) = 0$.

În plus există o infinitate de plane care conţin punctele A_1, A_2, A_3 şi care nu trec prin O.

§. 1.5. Momentul unui vector (legat sau glisant) în raport cu un punct (pol) O sau cu o axă (d,O,$\bar{u}$).

1.5.1 Rezumat teoretic

1. **Definiţie.** Fie $\bar{v} \in R^n$ un vector cu originea în A şi $B \in R^n$ un alt punct. Se numeşte moment al vectorului $\bar{v}$ faţă de punctul B, produsul vectorial

$$\overline{BA} \times \bar{v}, \qquad (1)$$

pe care-l notăm $M_B\bar{v}$, $M\bar{v}$ sau $\bar{M}$.

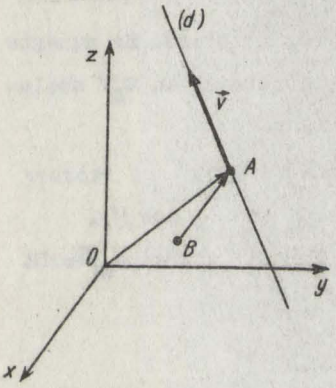


Fig.1.61.

Dacă $B \equiv O$, atunci $M_O\bar{v} = \overline{OA} \times \bar{v}$, (2)

unde $\overline{OA}$ este vectorul de poziţie al originii vectorului $\bar{v}$ faţă de originea O a reperului considerat în R^n.

O proprietate. Momentul vectorului $\bar{v}$ este invariant la deplasarea punctului A în lungul suportului vectorului (d).

Teorema lui Varignon. Fie $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ n vectori cu punctele de aplicaţie în acelaşi punct A. Atunci avem

$$\sum_{i=1}^{n} M_O(\bar{v}_i) = M_O\Big(\sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i\Big), \text{ adică:} \qquad (3)$$

Momentul faţă de un punct O al rezultantei (generale), aplicată în A, a unui sistem de vectori concurenţi în A, este egal cu suma momentelor vectorilor sistemului.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Propoziţie. Dacă luăm momentul lui $\vec{v}$ în raport cu O şi apoi în raport cu O', atunci avem egalitatea

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{v}$$

Alte proprietăţi:

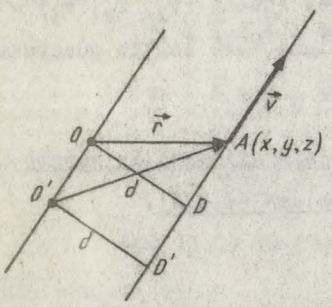


Fig.1.62.

1) $M_O = v.d$, $d = OD = OA \sin(\overrightarrow{OA}, \vec{v})$.

2) $M_{O'} = M_O$ dacă $\overrightarrow{O'O} \parallel \vec{v}$, i.e. $\overrightarrow{O'O} = \lambda \vec{v}$.

3) $$M_O\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \qquad (4)$$

x,y,z fiind coordonatele lui A.

4) Momentul unui vector e nul dacă punctul faţă de care calculăm momentul se află pe suportul vectorului.

2. Definiţie. Fie $\vec{v}$ un vector şi (d, O, $\vec{u}$) o axă. Se numeşte moment al vectorului $\vec{v}$ faţă de axa (d, O, $\vec{u}$) şi se notează cu $M_d\vec{v}$ scalarul $M_d\vec{v} = \vec{u}M_O(\vec{v})$, (5) ,

O fiind un punct oarecare al axei considerate.

Proprietăţi: 1) Dacă vectorii $\vec{u}$ (cos α, cos β, cos γ), $\overrightarrow{OA}(x,y,z)$ şi $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ sînt trei vectori coplanari, atunci $M_d\vec{v} = 0$.

2) $$M_d\vec{v} = \vec{u}(\overrightarrow{OA} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

3) Momentul unui vector în raport cu o axă este egal cu mărimea scalară a momentului proiecţiei vectorului $\vec{v}$ pe un plan perpendicular pe axă, luat în raport cu punctul în care axa înţeapă planul.

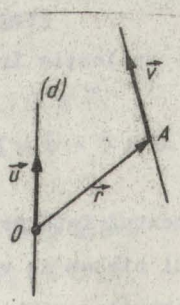


Fig.1.63.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

1.5.2. Exerciţii

49. 1) Să se calculeze momentul forţei $\vec{F} = (3,2,4)$ aplicate în A(3, 2, 2) mai întîi faţă de originea reperului Oxyz, apoi faţă de O'(-2, -2, 4).

2) Fie $\vec{OA} = 2\vec{I} + 2\vec{J} - \vec{k}$; $\vec{AB} = \vec{I} + 2\vec{k} - \vec{j}$; $\vec{BC} = -2\vec{I} - 3\vec{k} + 2\vec{J}$.

Se cer:

α) $M_A\vec{BC}$; $M_O\vec{CB}$; $M_{\vec{OA}}\vec{BC}$.

β) $M_{Ox}\vec{BC}$; $M_{Oy}\vec{BC}$; $M_{Oz}\vec{BC}$.

50. 1) Fie vectorul $\vec{F}(2, -4, 3)$ şi punctul A(1, 5, -3) în care el e aplicat. Se cere M_O şi $M_{O'}$, unde O' are coordonatele (5,-3,3).

2) Fie A(2, 3, -1) şi B(2, 4, 5) două puncte din R^3. Să se calculeze:

$\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{AB}$, $\vec{BA}$, $\vec{OA}.\vec{AB}$, $\vec{OA} \times \vec{BA}$, $M_O\vec{AB}$, $M_{\vec{AB}}\ \vec{OB}$.

51. Fie $\vec{AB}$ şi $\vec{AC}$ doi vectori concurenţi.

α) Să se determine suma $\vec{M}$ a momentelor $\vec{M}_1 + \vec{M}_2$ a acestor vectori în raport cu un punct P de pe dreapta Δ care trece prin B şi C.

β) Să se găsească locul geometric descris de vîrful vectorului $\vec{M}$, cînd P parcurge dreapta Δ.

Buletinul de matematică pură şi aplicată

Anul III, Nr.6, Februarie, Bucureşti, 1924

52. O forţă cu modulul de 12 N acţionează în lungul dreptei (d) de ecuaţie:

$$\vec{r} = (1+2t)\vec{I} + (-1 + 2t)\vec{J} + t\vec{k}, \quad t \in [0,T]$$

α) Să se calculeze momentul acestei forţe în raport cu punctul P al cărui vector de poziţie este $\vec{I} + \vec{J} + \vec{k}$.

β) De asemenea să se calculeze momentul aceluiaşi vector în raport cu axa (d') definită de

$$\vec{r} = (1 + 3s)\vec{I} + (1-4s)\vec{J} + \vec{k}, \quad s \in [0, S]$$

Cda. 236/987 fasc. 5

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

53. O roată hidraulică, avînd axa orizontală şi diametrul D = 3,60 m, este prevăzută cu 12 cupe, aşezate la distanţe egale pe periferia roţii. La un moment dat, roata ocupă poziţia din figură, iar cupele A, B, C, D, E, F, care conţin apă, sînt încărcate cu greutăţile următoare:

P_A = 500 N; P_B = 500 N; P_C = 500 N; P_D = 400 N; P_E = 350 N; P_F = 150 N.

Să se determine

α) Mărimea şi poziţia unei forţe care ar avea acelaşi efect asupra roţii ca şi greutatea apei din cupe;

β) Momentele forţelor din A-F faţă de punctul O.

γ) Ce forţă T trebuie aplicată tangent la butucul roţii, pentru ca să oprească roata, ştiind că butucul roţii are diametrul d = 1,20 m.

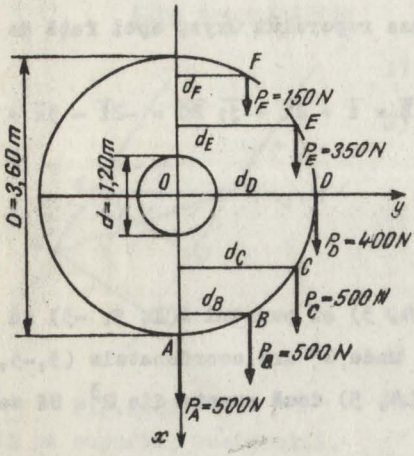


Fig.1.64.

1.5.3. Rezolvarea exerciţiilor

49. 1) După definiţie, avem

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j};$$

$$M_O = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} \quad N.m$$

Apoi

$$\vec{M}_{O'} = \vec{O'A} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 20\vec{i} - 26\vec{j} - 2\vec{k}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) α) Avem $M_A\vec{BC} = \vec{AB} \times \vec{BC} =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & +2 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\vec{i}-\vec{j};$$

din $\vec{AB} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ și $\vec{OA}$ dat găsim

$$\vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} + \vec{OB} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Deci $\vec{OB} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Din $\vec{CB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, cu $\vec{OB}$ cunoscut, găsim $\vec{CB} = \vec{CO} + \vec{OB} =$ $= -\vec{OC} + 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{OC} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Acum

$$M_O\vec{CB} = \vec{OC} \times \vec{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 7\vec{j} - 8\vec{k};$$

$$M_{\vec{OA}}\vec{BC} = \left(\frac{\vec{OA}}{OA}, \vec{OB}, \vec{BC}\right) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{4}{3};$$

β) $M_{Ox}\vec{BC} = (\vec{i}, \vec{OB}, \vec{BC}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$

$$M_{Oy}\vec{BC} = (\vec{j}, \vec{OB}, \vec{BC}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 7$$

$$M_{Oz}\vec{BC} = (\vec{k}, \vec{OB}, \vec{BC}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 8.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

5o. 1) Avem $\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 9\vec{j} - 14\vec{k}.$

Apoi

$$\vec{M}_{O'} = \vec{O'O} \times \vec{F} + \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} + \vec{M}_O =$$

$$= -3\vec{i} + 9\vec{j} + 14\vec{k} + 3\vec{i} - 9\vec{j} - 14\vec{k} = \vec{0}.$$

Observație. $\vec{M}_{O'} = \vec{0}$ deoarece O' se găsește pe dreapta care trece prin A și care are ca vector director pe $\vec{F}$, i.e. pe dreapta de ecuații:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+3}{3}$$

2) Evident avem

$$\vec{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{OB} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_C)\vec{k} = \vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{AB} = 2.0 + 3.1 - 1.6 = -3$$

$$\vec{OA} \times \vec{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -19\vec{i} + 12\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$M_O\vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & +1 & +6 \end{vmatrix} = 19\vec{i} - 12\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$M_{\vec{AB}}\vec{OB} = \frac{\vec{AB}}{AB} \cdot M_A\vec{OB} = \frac{\vec{AB}}{AB} \cdot M_B\vec{OB} = \frac{\vec{AB}}{AB} \cdot (\vec{BO} \times \vec{OB}) = \frac{\vec{AB}}{AB} \cdot \vec{0} = 0.$$

51. c) Fie B(b,0,0) și C(c,d,0) iar P(x,y,0). Ecuația dreptei BC este:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

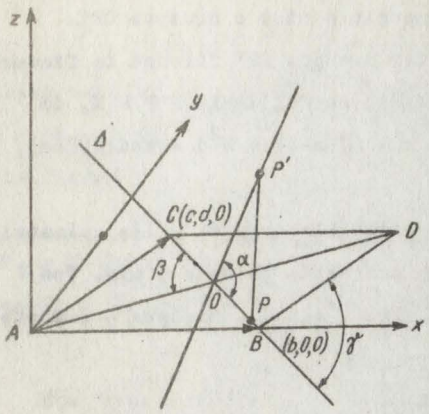


Fig.1.65.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau}$$

$$y = \frac{d}{c-b}(x-b) \qquad (1)$$

Avem apoi

$$\vec{M}_P\vec{AB} = \vec{PA} \times \vec{AB}, \text{ dar } \vec{PA} = -x\vec{i} - y\vec{j}.$$

Deci

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_P\vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & 0 \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = by\vec{k};$$

$$\vec{M}_2 = \vec{M}_P\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (cy - xd)\vec{k}.$$

Acum

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{k}\left[(b+c)y - xd\right] \qquad (2)$$

Ținînd seama de ecuația dreptei BC dată prin ecuația (1), găsim:

$$\vec{M} = \frac{2 \cdot bdx - (b^2d + bcd)}{c-b} \cdot \vec{k}$$

Astfel $\vec{M} = O\vec{i} + O\vec{j} + N\vec{k}$, unde

$$N = \frac{2bdx - b^2d - bcd}{c-b}$$

β) Dacă avem în vedere că forțele $\vec{AB}$ și $\vec{AC}$ sînt concurente, atunci, după teorema lui Varignon avem $M = R \cdot d(P, AD) = AD \cdot \text{distanța } (P, AD)$.

Observăm că $M = 0$ pentru $P \equiv O$. Deci O e un punct al locului căutat.

Să calculăm $\operatorname{tg}\alpha$, unde $\alpha = \sphericalangle(\vec{PO}, \vec{OP'})$, unde $PP' = N$. Avem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PP'}{OP} = \frac{N}{OP} = \frac{M}{OP} = \frac{AD \cdot OP \sin\beta}{OP} = R \cdot \sin\beta,$$

unde $\beta = \sphericalangle(\vec{AO}, \vec{OC})$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Cum $tg\,\mathcal{L}$ = constant, atunci avem că și $\mathcal{L}$ = constant.

Deci <u>suportul locului</u> geometric căutat e dreapta OP'.

De fapt locul căutat e chiar dreapta OP' fiindcă la fiecare N dat îi corespunde un punct P și unul P', astfel încît P'P = N, de unde rezultă abscisa x a lui P, adică $x = (N(c-b) + b^2d + bcd)/(2bd)$, apoi y, dat de (1).

<u>Observație</u>. Pentru a găsi ecuațiile dreptei - loc geometric căutat, luăm un versor $\overrightarrow{OU}$ pe $\overrightarrow{OP'}$ și-l proiectăm pe cele 3 axe. Vom găsi proiecțiile ($\cos\mathcal{L}\cdot\cos\beta$, $\cos\mathcal{L}\sin\beta$, $\sin\mathcal{L}$). Dreapta - loc geometric trece prin $O(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2}, 0)$.

Astfel ecuațiile ei vor fi

$$\frac{x - \frac{b+c}{2}}{\cos\mathcal{L}\cdot\cos\beta} = \frac{y - \frac{d}{2}}{\cos\mathcal{L}\sin\beta} \quad \frac{z}{\sin\mathcal{L}}$$

52. $\mathcal{L}$) Dreapta (d), ale cărei ecuații scalare sînt ecuațiile

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} (= t)$$

are parametrii directori (2,2,1). Deci versorul acestei direcții este:

$$\overrightarrow{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{4+4+1}}, \frac{2}{\sqrt{4+4+1}}, \frac{1}{\sqrt{4+4+1}}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Acum $\overrightarrow{F} = 12\overrightarrow{u} = (8,8,4)$ și considerăm forța aplicată în punctul A(1+2t,2t-1,t). Momentul lui $\overrightarrow{F}$ față de P(1, 1, 1) va fi

$$M_P\overrightarrow{F} = \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{F} = (2t, 2t-2, t-1) \times (8,8,4) =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2t & 2t-2 & t-1 \\ 8 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -8\overrightarrow{j} + 16\overrightarrow{k}$$

β) Ecuațiile scalare ale axei (d') sînt

$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{0} (= s)$. Astfel vectorul director al acestei drepte are componentele (3, -4, 0) și modulul 5. Versorul acestei axe este $\overrightarrow{v} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0)$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Acum $M_{d'}\vec{F} = \vec{v} \cdot M_P\vec{F} = \frac{3}{5} \cdot 0 + (\frac{-4}{5})(-8) + 0 \cdot 16 = \frac{32}{5}$.

53. α) Mărimea forței $\vec{R}$, care produce asupra roții hidraulice același efect ca și forțele aplicate în punctele A-F este $R = 3P + e,8P + e,7\ P + e,3\ P = 4,8\ P = 24ee$ N și va avea sensul lui Ox din figură (am notat P = 5ee N).

β) Mărimile momentelor celor 6 forțe vor fi $MP_A = P.0 = 0$; $MP_B = P \cdot d_B$; $MP_C = P.d_C$; $MP_D = e,8\ P.d_D$; $MP_E = e,7\ P.d_E$ $MP_F = e,3P.d_F$; dar $d_B = OB.\sin 3e^\circ = \frac{R}{2}$; $d_C = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $d_D = R$, $d_E = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $d_F = \frac{R}{2}$

Așa că suma mărimilor momentelor va fi

$$M = PR\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + e,8 + e,7\ \frac{\sqrt{3}}{2} + e,3\ \frac{1}{2}\right] = \frac{5ee}{2} \cdot 1,8e = 2\ 628\ N.m.$$

Pentru a afla poziția forței $\vec{R}$ aplicăm relația R.x = 2628 și ne dă x = 1,e95 m.

γ) Determinarea lui T se face din relația T.r = M, care ne dă $T = \frac{2628}{e,6e} = 438e$ N.

§.1.6. Dublul produs vectorial

1.6.1. Rezumat teoretic

Definiție. Fie $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ trei vectori. Vectorul $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ se numește **dublul produs vectorial** al celor 3 vectori.

Proprietăți. 1) (1) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ (**formula lui Gibbs**).

2) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$.

1.6.2. Exerciții

54. 1) Să se arate că oricare ar fi vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ din $\mathbb{R}^3$ avem:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{b}(\vec{a} \times \vec{y}) - \vec{a}(\vec{b} \times \vec{y}).$$

2) (O altă identitate a lui Lagrange). Fie 4 vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ din $\mathbb{R}^3$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Atunci avem:

$$(2)\qquad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{c} & \vec{a}\vec{d} \\ \vec{b}\vec{c} & \vec{b}\vec{d} \end{vmatrix}$$

55.

1) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{x}\times\vec{y}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{x} & \vec{a}\vec{y} \\ \vec{b}\vec{x} & \vec{b}\vec{y} \end{vmatrix}$, (1) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$

2) $(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) + (\vec{b}\times\vec{c})(\vec{d}\times\vec{b}) + (\vec{c}\times\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$, $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in\mathbb{R}^3$.

3) Să se descompună un vector $\vec{x}$ după o axă de versor $\vec{e}_1$ și după un plan perpendicular pe alt versor $\vec{e}_2$.

56. 1) Să se dezvolte $\vec{A} = ((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c})\times\vec{d}$.

2) Dacă $\vec{a}\perp\vec{b}$, atunci $(\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})))) = a^4\vec{b}$.

3) In treunghiul ABC înălțimea din A o notăm cu AD. Să se exprime $\vec{AD}$ în funcție de $\vec{AB} = \vec{c}$ și $\vec{BC} = \vec{a}$.

Să se determine pentru ce vectori din V putem avem proprietatea:

4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\in V$,

sau

5) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\in V$.

1.6.3. Rezolvarea exercițiilor

54.1) Notăm $\vec{w} = \vec{x}\times\vec{y}$ și dezvoltăm dublul produs vectorial $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{w} = -\vec{w}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ după formula lui Gibbs.

2) Dacă facem apel la vectorul $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, dacă folosim proprietățile produsului mixt și formula lui Gibbs, avem

$$\vec{c}(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{c}\times\vec{c})\cdot\vec{d} = -\left[\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})\right]\cdot\vec{d} = \left[\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})\right]\vec{d} =$$

$$= (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{c}\vec{b}).$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

55. 1) Notăm $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$ și scriem $\vec{w}(\vec{x} \times \vec{y}) = (\vec{w} \times \vec{x})\vec{y} =$

$= ((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{x})\,\vec{y} = -(\vec{x} \times (\vec{a} \times \vec{b}))\,\vec{y} = -(\vec{a}\vec{y})(\vec{b}\vec{x}) + (\vec{b}\vec{y})(\vec{a}\vec{x}) =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{x} & \vec{a}\vec{y} \\ \vec{b}\vec{x} & \vec{b}\vec{y} \end{vmatrix}$$

2) Se aplică (1) de 3 ori.

3) Fie $\vec{s}_2$ versorul normal la planul P și $\vec{s}_3$ un versor din planul P, așternut pe proiecția lui $\vec{a}$ pe planul P. Va trebui să avem

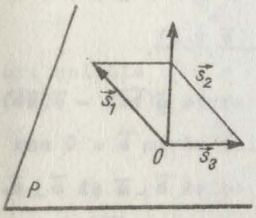


Fig.1.66

(1) $\vec{a} = a_1\vec{s}_1 + a_3\vec{s}_3$, $\vec{s}_2 \perp \vec{s}_3$.

In (1) înmulțim scalar cu $\vec{s}_2$ și obținem pe a_1, anume

(2) $a_1 = \dfrac{\vec{a}\vec{s}_2}{\vec{s}_1\vec{s}_2}$. Înmulțim în (1) vectorial cu $\vec{s}_1$ și avem:

(3) $$\vec{a} \times \vec{s}_1 = a_3\vec{s}_3 \times \vec{s}_1$$

Acum în (3) înmulțim vectorial cu $\vec{s}_2$ și deducem

(4) $$\vec{s}_2 \times (\vec{a} \times \vec{s}_1) = a_3\vec{s}_2 \times (\vec{s}_3 \times \vec{s}_1) = \vec{a}_3\Big[\vec{s}_3(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) - \vec{s}_1(\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3)\Big]$$

0

De aici rezultă

(5) $$a_3\vec{s}_3 = \frac{\vec{s}_2 \times (\vec{a} \times \vec{s}_1)}{\vec{s}_1\vec{s}_2}$$

Final, cu (2) și (5), am obținut descompunerea

$$\vec{a} = \frac{1}{\vec{s}_1\vec{s}_2}\left((\vec{a}\vec{s}_2)\vec{s}_1 + \vec{s}_2 \times (\vec{a} \times \vec{s}_1)\right)$$

Observație. Pentru $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 = \vec{n}$ = versorul normalei la planul P, obținem descompunerea

$$\vec{a} = (\vec{a}\vec{n})\vec{n} + \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n}),$$

care poate fi interpretată drept descompunerea unui vector $\vec{a}$ după normala la o suprafață dată și după o componentă în planul tangent la acea suprafață.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

56. 1) Folosim formula lui Gibbs şi avem

$$\vec{A} = (-\vec{a}(\vec{bc}) + \vec{b}(\vec{ac})) \times \vec{d} = (\vec{bc})(\vec{dxa}) + (\vec{ac})(\vec{bxd})$$

2) Idem.

3) Scriem $\vec{AD} = \vec{AB} + \lambda \vec{BC}$ sau $\vec{h} = \vec{c} + \lambda \vec{a}$ (1). Înmulţim scalar cu $\vec{a}$ în (1) şi avem $0 = \vec{ac} + \lambda a^2$, de unde $\lambda = -\frac{\vec{ac}}{a^2}$.

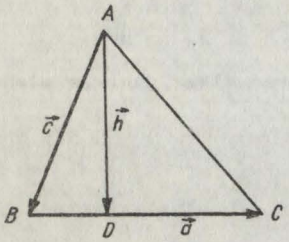


Fig.1.67.

Acum (1) se scrie $\vec{h} = \vec{c} - \frac{(\vec{ac})}{a^2}\vec{a} = \frac{\vec{c}(\vec{a}.\vec{a}) - \vec{a}(\vec{a}.\vec{c})}{a^2} = \frac{\vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{a})}{a^2}$.

4) Relaţia dată se scrie $\vec{a}(\vec{bc}) - \vec{c}(\vec{ab}) = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{0}$. De aici găsim $\vec{b} = 0$ sau $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$ sau $\vec{b} \parallel \vec{a} \times \vec{c}$, adică $\vec{b} \perp \vec{a}$ şi $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Deci 1) are loc în situaţiile: $\vec{a} = \lambda \vec{c}$, respectiv $\vec{b} \perp \vec{a}$ şi $\vec{b} \perp \vec{c}$, care sînt condiţii şi necesare şi suficiente. Am lăsat la o parte cazul evident $\vec{b} = \vec{0}$.

5) Dezvoltînd dublele produse vectoriale şi reducînd termenii asemenea, dăm peste cazul 1).

§.1.7. Ecuaţii vectoriale

1.7.1. Exerciţii

57. 1) Să se determine vectorii $\vec{x}$ şi $\vec{y}$, ştiind că suma lor este $\vec{s}$, iar diferenţa lor este $\vec{d}$.

2) Să se rezolve ecuaţia $\vec{xa} = \alpha$ (1), unde $\vec{a}$ e un vector cunoscut, $\vec{x}$ un vector necunoscut, iar $\alpha \in \mathbb{R}$ un unumăr dat.

3) Să se rezolve ecuaţia:

$$\vec{a}.\vec{x} = \vec{b}.\vec{x}$$

în care $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt doi vectori daţi, iar $\vec{x}$ un vector necunoscut.

4) Să se rezolve ecuaţia $(\vec{a},\vec{b},\vec{x}) = \alpha$, $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$.

5) Să se rezolve: $\vec{xa} = \alpha$ şi $\vec{xb} = \beta$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

58. 1) Fie $\vec{\alpha}$ și $\vec{a}$ doi vectori perpendiculari. Să se determine $\vec{x}$ din ecuația

$$\vec{x} \times \vec{a} = \vec{\alpha} \qquad (1)$$

2) Să se rezolve ecuația

$$\vec{x} \times \vec{a} = \vec{x} \times \vec{b}$$

în care $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt vectori dați, iar $\vec{x}$ e un vector necunoscut.

3) Să se arate că ecuația

$$\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x} + \vec{\alpha} \qquad (1)$$

are soluția unică și apoi să se rezolve.

4) Să se rezolve ecuațiile:

$$\begin{cases} \vec{x} \times \vec{a} = \vec{\alpha} \\ \vec{x} \times \vec{b} = \vec{\beta}, \ \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \ \vec{a}, \vec{b} \text{ vectori dați.} \end{cases}$$

59. 1) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \vec{a}\vec{x} = \alpha & (1) \\ \vec{a} \times \vec{x} = \beta & (2) \end{cases}$$

în raport cu $\vec{x}$.

2) Să se rezolve în raport cu $\vec{x}$ și $\vec{y}$ sistemul de ecuații vectoriale: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$; $\vec{a} \times \vec{x} + \vec{b} \times \vec{y} = \vec{0}$

3) Să se rezolve sistemul de ecuații vectoriale:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{c}, \ \vec{y} \times \vec{z} = \vec{a}, \ \vec{z} \times \vec{x} = \vec{b}, \ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0.$$

4) Care sînt condițiile necesare și suficiente pentru ca sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \vec{a} \times \vec{x} + \vec{b} \times \vec{y} = \vec{c} \\ \vec{b} \times \vec{x} + \vec{y} \times \vec{a} = \vec{d} \end{cases}$$

să aibă soluții? Să se afle toate soluțiile acestui sistem. Aici $\vec{x}$ și $\vec{y}$ sînt vectori necunoscuți, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ sînt vectori dați, iar $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 \neq 0$.

1.7.2. Rezolvarea exercițiilor

57. 1) Din $\vec{x} + \vec{y} = \vec{s}$ și $\vec{x} - \vec{y} = \vec{d}$, deducem $\vec{x} = \frac{\vec{s} + \vec{d}}{2}$ și $\vec{y} = \frac{\vec{s} - \vec{d}}{2}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Dacă avem în vedere că: (1) reprezintă ecuaţia unui plan

$$a_1x + a_2y + a_3z = \alpha \quad .$$

este clar că soluţia acestei ecuaţii va depinde de doi parametrii, astfel de pildă (pentru $a_3 \neq 0$) avem

$$x = u$$

$$y = v \qquad \text{cu } u, v \in \mathbb{R}$$

$$z = \frac{1}{a_3} \cdot (-a_1u - a_2v$$

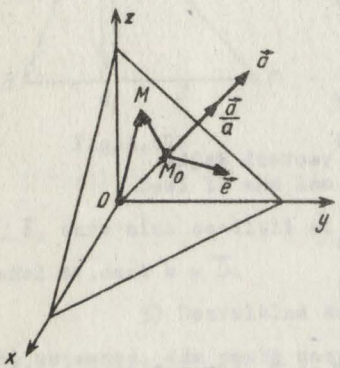


Fig.1.68.

Altfel:

Vectorul $\vec{a}$ este vectorul normal la plan.

Conform cu figura alăturată, putem scrie

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$.

Evident $\overrightarrow{OM} = \vec{x}$, $\overrightarrow{OM_0} = OM_0 \cdot \frac{\vec{a}}{a}$ şi

$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{e}$, unde $\vec{e}$ ($\perp \vec{a}$) este un vector unitate din planul perpendicular pe $\vec{a}$.

Scalarul OM_0 este distanţa de la 0 la planul (1), $OM_0 = \dfrac{|\alpha|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}}$

Acum $\vec{x}$ se va scrie

$$\vec{x} = \frac{|\alpha|}{a^2}\vec{a} + \lambda \vec{e}.$$

Şi soluţia dată de această formulă depinde tot de 2 parametri. În adevăr, $\vec{e}$ fiind un versor, proiecţiile lui ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) verifică relaţiile.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \text{şi}$$

$$(\vec{a} \perp \vec{e}) \quad a_1\cos\alpha + a_2\cos\beta + a_3\cos\gamma = 0$$

Deci din cele 3 componente ale lui ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) una rămîne arbitrară, care împreună cu λ reprezintă tocmai cei doi parametrii de care depinde $\vec{x}$.

3) Ecuaţia se mai scrie $\vec{x}(\vec{a}-\vec{b}) = 0$. E un caz particular al ecuaţiei $\vec{ax} = \alpha$, în care $\alpha = 0$, iar în locul lui $\vec{a}$ avem $\vec{a}-\vec{b}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Deci soluția este

$\vec{x} = \lambda \vec{e}$ cu $\vec{e}$ versor arbitrar perpendicular pe $\vec{a} - \vec{b}$ și aceasta depinde de 2 parametri.

4) Ecuația se scrie $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{x} = \alpha$

Deci e un caz particular al ecuației de la 1), în care $\vec{a}$ trece în $\vec{a} \times \vec{b}$.

5) Vectorul $\vec{x}$ îl descompunem după vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{a} \times \vec{b}$, i.e. luăm

(1) $$\vec{x} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda \vec{a} \times \vec{b}.$$

În (1) înmulțim scalar cu $\vec{a}$ și apoi cu $\vec{b}$ și găsim sistemul

$$\begin{cases} \lambda_1 \vec{a}^2 + \lambda_2 \vec{a}\vec{b} = \alpha \\ \lambda_1 \vec{a}\vec{b} + \lambda_2 \vec{b}^2 = \beta \end{cases}$$

care ne determină pe λ_1 și λ_2. Astfel rezultă

$$\lambda_1 = \frac{\alpha \vec{b}^2 - \beta(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{a} \times \vec{b})^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta \vec{a}^2 - \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{a} \times \vec{b})^2}$$

Înlocuim pe λ_1 și λ_2 în (1) și obținem pe $\vec{x}$, ca depinzând de un parametru scalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ecuația are "o simplă infinitate de soluții".

Soluția sub formă definitivă se scrie:

$$\vec{x} = \frac{\alpha \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \beta \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})}{(\vec{a} \times \vec{b})^2} + \lambda \vec{a} \times \vec{b}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

58. 1) Ținem seama de faptul că $\vec{\alpha} \perp \vec{a}$ și $\vec{\alpha} \perp \vec{x}$; avem (vedeți figura): $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$, i.e.

$$\vec{x} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \times \vec{\alpha}$$

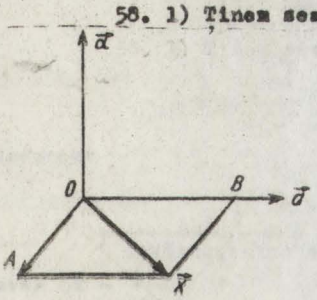


Fig.1.69.

Înlocuim pe x în ecuație și găsim

$$(\lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \times \vec{\alpha}) \times \vec{a} = \vec{\alpha} \text{ sau}$$

$$\lambda \vec{a} \times \vec{a} - \mu \vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{\alpha}) + \mu \vec{\alpha}\cdot\vec{a}^2 = \vec{\alpha}$$

De aici deducem $\mu = \frac{1}{\vec{a}^2}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Astfel $\vec{x} = \lambda \vec{a} + \frac{\vec{a} \times \vec{\mathcal{L}}}{\vec{a}^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ oarecare și mulțimea soluțiilor ecuației (1) depinde de un parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.

Altă rezolvare: Fie $\vec{x}_0$ o soluție particulară a ecuației (1). Avem $\vec{x}_0 \times \vec{a} = \vec{x} \times \vec{a}$. De aici deducem atunci

$(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{a} = \vec{0}$, deci $\vec{x} - \vec{x}_0 = \lambda \vec{a}$. Astfel

$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}$.

Dar o soluție particulară este $\vec{x}_0 = \mu \vec{a} \times \vec{\mathcal{L}}$, iar scalarul μ se determină prin înlocuire în (1):

$$\mu(\vec{a} \times \vec{\mathcal{L}}) \times \vec{a} = \vec{\mathcal{L}} \ , \ -\mu \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{\mathcal{L}}) = \vec{\mathcal{L}}, \ \mu \vec{a} \times (\vec{\mathcal{L}} \times \vec{a}) = \vec{\mathcal{L}},$$

$$\mu\left[\vec{a}^2 \vec{\mathcal{L}} - \vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{\mathcal{L}})\right] = \vec{\mathcal{L}} \ , \ \mu = \frac{1}{\vec{a}^2}.$$

Observație. Și în mod tradițional ne convingem că mulțimea soluțiilor ecuației vectoriale date depinde de un singur parametru scalar.

In adevăr ecuația (1) este echivalentă cu următoarele 3 ecuații scalare:

$$(2) \qquad \begin{cases} ya_3 - a_2 z = \mathcal{L}_1 \\ -a_3 x + a_1 z = \mathcal{L}_2 \\ a_2 x - a_1 y = \mathcal{L}_3 \end{cases}$$

Acest sistem are determinantul necunoscutelor

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dacă admitem ca determinant principal pe

$$D_p = \begin{vmatrix} 0 & a_3 \\ -a_3 & 0 \end{vmatrix} = a^2_3 \neq 0,$$

constatăm imediat că determinantul caracteristic corespunzător

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$D_6 = \begin{vmatrix} 0 & a_3 & \alpha_1 \\ -a_3 & 0 & \alpha_2 \\ a_2 & -a_1 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0,$$

în virtutea ortogonalităţii lui $\vec{a}$ şi $\vec{\alpha}$:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$$

Astfel necunoscutele principale x şi y se pot exprima în funcţie de z prin formulele:

$$x = \frac{a_1 z + \alpha_2}{a_3}$$

$$y = \frac{a_2 z + \alpha_1}{a_3}$$

$$z = z$$

şi mulţimea soluţiilor depinde în adevăr de un singur parametru real, anume de $z \in \mathbb{R}$.

Observaţie. Un caz simplu şi interesant este acela în care $\vec{x} \perp \vec{a}$. In această ipoteză, din ecuaţia dată deducem $\vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{\alpha}$ sau $\vec{x}\vec{a}^2 - \vec{a}(\vec{a}\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{\alpha}$, iar $\vec{x} = \frac{\vec{a} \times \vec{\alpha}}{\vec{a}^2}$. Evident aceasta corespunde la $\lambda = 0$.

2) Ecuaţia dată o mai scriem astfel

$$\vec{x} \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$$

şi e un caz particular al ecuaţiei 1).

De aici deducem $\vec{x} = \lambda(\vec{a} - \vec{b})$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrar.

3) Unicitatea soluţiei. Fie $\vec{x} = \vec{x}_1$ o soluţie. Atunci avem

$$\vec{x}_1 = \vec{a} \times \vec{x}_1 + \vec{\alpha} \qquad (2)$$

Fie $\vec{x}$ o altă soluţie a ecuaţiei (1). Atunci din (1) şi (2) deducem:

$$\vec{x} - \vec{x}_1 = \vec{a} \times (\vec{x} - \vec{x}_1) \qquad (3)$$

Dar această relaţie ne spune că $\vec{x} - \vec{x}_1 \perp \vec{x} - \vec{x}_1$. De aceea vom avea $(\vec{x} - \vec{x}_1)^2 = 0$ sau $\vec{x} - \vec{x}_1 = 0$ sau $\vec{x} = \vec{x}_1$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Determinarea soluției. Să înmulțim scalar cu $\vec{a}$ în (1). Rezultă $\vec{a}\vec{x} = \vec{a}\vec{\alpha}$(4)

Să înmulțim vectorial la stînga cu $\vec{a}$ în (1). Avem

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x}) + \vec{a} \times \vec{\alpha} \text{ sau}$$

$$\vec{x} - \vec{\alpha} = \vec{a}(\vec{a}\vec{x}) - \vec{x}a^2 + \vec{a} \times \vec{\alpha} \text{ sau, cu (4),}$$

$$\vec{x}(1 + \vec{a}^2) = \vec{a}(\vec{a}\vec{\alpha}) + \vec{a} \times \vec{\alpha} + \vec{\alpha},$$

de unde rezultă $\vec{x}$.

Observație. Se poate căuta $\vec{x}$ de forma $\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{\alpha} + \nu\vec{a} \times \vec{\alpha}$

4) Evident, conform cu proprietățile produsului vectorial, avem $\vec{\alpha} \perp \vec{x}$ și $\vec{\beta} \perp \vec{x}$, adică $\vec{x}$ trebuie să fie perpendicular pe planul determinat de vectorii $\vec{\alpha}$ și $\vec{\beta}$.

De aceea vom căuta pe $\vec{x}$ de forma $\vec{x} = \lambda(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$. Înlocuind în fiecare ecuație și dezvoltînd dublele produse vectoriale după formula lui Gibbs, găsim

$$\begin{cases} \lambda(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{a} = \vec{\alpha} \\ \lambda(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{b} = \vec{\beta} \end{cases} \begin{cases} -\lambda\vec{\alpha}(\vec{a}\vec{\beta}) + \lambda(\vec{a}\vec{\alpha})\vec{\beta} = \vec{\alpha} \\ -\lambda\vec{\alpha}(\vec{b}\vec{\beta}) + \lambda(\vec{b}\vec{\alpha})\vec{\beta} = \vec{\beta}. \end{cases} \quad (1)$$

Dar $\vec{a}\vec{\alpha} = 0$ și $\vec{b}\vec{\beta} = 0$. Atunci cele două ecuații (1) devin

$\vec{\alpha}(1 + \lambda(\vec{a}\vec{\beta})) = 0$; $\vec{\beta}(1 - \lambda(\vec{b}\vec{\alpha})) = 0$.

Deci ele ne conduc la $\lambda = \frac{1}{\vec{b}\vec{\alpha}} = -\frac{1}{\vec{a}\vec{\beta}}$

De aici rezultă o condiție necesară pentru existența soluției și anume $\vec{b}\vec{\alpha} + \vec{a}\vec{\beta} = 0$. Acum $\vec{x}$ se va scrie $\vec{x} = \frac{\vec{\alpha} \times \vec{\beta}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{b}}$

59. 1) Avem $\vec{\beta} \perp \vec{a}$, $\vec{\beta} \perp \vec{x}$. În (2) înmulțim vectorial la stînga cu $\vec{a}$ și avem

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x}) = \vec{a} \times \vec{\beta}\ ;\ \vec{a}(\vec{a}\vec{x}) - \vec{x}a^2 = \vec{a} \times \vec{\beta}\ ;\ \vec{a}.\alpha - \vec{a} \times \vec{\beta} = \vec{x}a^2\ ;$$

$$\vec{x} = \alpha\frac{\vec{a}}{\vec{a}^2} + \frac{\vec{\beta} \times \vec{a}}{\vec{a}^2}.$$

2) Din prima ecuație deducem $\vec{y} = -\vec{x}$, care înlocuit în a doua ecuație ne dă $(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{x} = \vec{0}$.

De aici rezultă $\vec{x}$ coliniar cu $\vec{a} - \vec{b}$, deci $\vec{x} = \lambda(\vec{a} - \vec{b})$; rezultă apoi $\vec{y} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Deci

$$\begin{cases} \vec{x} = \lambda(\vec{a} - \vec{b}) \\ \vec{y} = \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \end{cases}$$

3) Din relaţiile date deducem că: $\vec{x} \perp \vec{c}$ şi $\vec{x} \perp \vec{b}$. Deci $\vec{x} = \alpha(\vec{b} \times \vec{c})$. Analog găsim $\vec{y} = \beta(\vec{c} \times \vec{a})$ şi $\vec{z} = \gamma(\vec{a} \times \vec{b})$, cu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ arbitrari.

4) Înmulţim scalar cu $\vec{a}$ prima ecuaţie şi cu $\vec{b}$ a doua şi găsim

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{y}) = \vec{ac}; \quad (\vec{b},\vec{y},\vec{a}) = \vec{bd}.$$

Având în vedere că $(\vec{a},\vec{b},\vec{y}) = (\vec{b},\vec{y},\vec{a})$, deducem că $\vec{ac} = \vec{bd}$.

Înmulţim scalar prima ecuaţie cu $\vec{b}$ şi a doua cu $\vec{a}$ şi obţinem

$$\begin{cases} (\vec{b},\vec{a},\vec{x}) = \vec{bc} \\ (\vec{a},\vec{b},\vec{x}) = \vec{ad} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} -(\vec{ab},\vec{x}) = \vec{bc} \\ (\vec{a},\vec{b},\vec{x}) = \vec{ad} \end{cases}, \text{ respectiv } \vec{bc} + \vec{ad} = 0.$$

Deci în ipoteză că ecuaţiile admit soluţii, am dedus condiţiile:

$$\begin{cases} \vec{ac} - \vec{bd} = 0 \\ \vec{bc} + \vec{ad} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

care sînt condiţii <u>necesare</u> pentru existenţa lui $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ şi $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

Să demonstrăm suficienţa lor.

Înmulţim vectorial cu $\vec{a}$ la stînga prima ecuaţie, iar a doua cu $\vec{b}$ şi adunăm. Găsim

$$-\vec{x}(\vec{a}^2+\vec{b}^2) + \vec{a}(\vec{ax}) + \vec{b}(\vec{bx}) + \vec{b}(\vec{ay}) - \vec{a}(\vec{by}) = \vec{axc} + \vec{bxd} \quad \text{sau}$$

$$-\vec{x}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) + \vec{a}(\vec{ax} - \vec{by}) + \vec{b}(\vec{bx} + \vec{ay}) = \vec{axc} + \vec{bxd}$$

Fie acum $C_1 = \dfrac{(\vec{ax} - \vec{by})}{\vec{a}^2 + \vec{b}^2}$ şi $C_2 = \dfrac{\vec{bx} + \vec{ay}}{\vec{a}^2 + \vec{b}^2}$

Cu această notaţie, $\vec{x}$ capătă forma

$$\vec{x} = -\frac{\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}}{\vec{a}^2 + \vec{b}^2} + C_1\vec{a} + C_2\vec{b} \qquad (m)$$

Înmulţim vectorial la stînga prima ecuaţie cu $\vec{b}$ şi a doua cu $-\vec{a}$; obţinem:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\begin{cases} \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{x}) + \vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{y}) = \vec{b} \times \vec{c} \\ -\vec{a}\vec{x} \times (\vec{b} \times \vec{x}) + \vec{a}\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{a}) = -\vec{a} \times \vec{d}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a}(\vec{b}\vec{x}) - \vec{x}(\vec{a}\vec{b}) + \vec{b}(\vec{b}\vec{y}) - \vec{y}\vec{b}^2 = \vec{b} \times \vec{c} \\ -\vec{b}(\vec{a}\vec{x}) + \vec{x}(\vec{a}\vec{b}) - \vec{y}\vec{a}^2 + \vec{a}(\vec{a}\vec{y}) = -\vec{a} \times \vec{d} \end{cases}$$

De aici prin adunare găsim pe $\vec{y}$:

$$-\vec{y}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) = \vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{d} - \vec{a}\left[\vec{b}\vec{x} + \vec{a}\vec{y}\right] + \vec{b}(\vec{a}\vec{x} - \vec{b}\vec{y}),$$

$$\vec{y} = \frac{\vec{a} \times \vec{d} - \vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a}^2 + \vec{b}^2} - c_1\vec{b} + d\vec{c}_2 . \qquad (mm)$$

Înlocuim în sistem $\vec{x}$ și $\vec{y}$ și ținem cont de (1) și găsim o identitate. Deci (1) reprezintă condiții suficiente, iar formulele (m) și (mm) reprezintă soluția sistemului considerat.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

CAPITOLUL II

SISTEME DE VECTORI

§2.1. Sisteme de vectori legaţi sau alunecători

2.1.1. Rezumat teoretic

Definiţii. 1. Spunem că ni s-a dat un sistem de n vectori legaţi $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ dacă ni se dau expresiile acestora împreună cu punctele lor de aplicaţie $A_1(\bar{r}_1), \ldots, A_n(\bar{r}_n)$.

Analog se defineşte un sistem de n vectori alunecători.

Un asemenea sistem de vectori se notează: $(\bar{v})$, $(\bar{v}_i)_{i=\overline{1,n}}$, S, (S).

2. Se numeşte torsor al sistemului de vectori legaţi sau alunecători S în punctul O perechea de vectori:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i \quad \text{(rezultanta generală a sistemului de vectori)}$$

$$\bar{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{v}_i \quad \text{(momentul rezultant al sistemului de vectori faţă de punctul O) (vedeţi figura 2.1.a).}$$

Torsorul unui sistem de vectori $(\bar{v}_i)$ faţă de punctul O se notează astfel:

$$\mathcal{T}_o(\bar{v}_i) = (\bar{R}, \bar{M}_o)$$

Propoziţie. La schimbarea polului O cu polul O' rezultanta generală $\bar{R}$ este invariantă (i.e. $\bar{R}' = \bar{R}$), iar momentul rezultant se modifică după legea:

$$\bar{M}_{O'} = \overline{O'O} \times \bar{R} + \bar{M}_o.$$

Definiţie. Se numeşte scalar al torsorului $\mathcal{T}_o$ al unui sistem de vectori în punctul O produsul scalar dintre $\bar{R}$ şi $\bar{M}_o$, i.e. $\bar{R}\bar{M}_o$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Propoziţie. Scalarul torsorului unui sistem de vectori este invariant la schimbarea polului, faţă de care se face calcularea torsorului.

Definiţie. Spunem că torsorul $\mathcal{C}_O$ are forma minimă, dacă, făcînd reducerea sistemului în punctul O', avem $\vec{M}_{O'} = \vec{P}$, i.e. $\vec{Q} = \vec{0}$ sau $\vec{R} = \lambda \vec{M}_{O'}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (vedeţi figura 2.1.b).

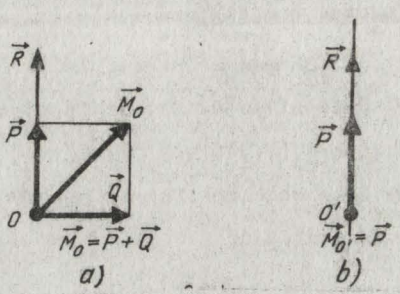


Fig.2.1.

Propoziţie. Componenta $\vec{P}$ a momentului rezultant al unui sistem de vectori este un invariant la schimbarea polului faţă de care se calculează torsorul.

Definiţie. Fiind dat un sistem de n vectori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ următoarele operaţii făcute cu aceşti vectori:

1) Compunerea a doi sau mai mulţi vectori;

2) Descompunerea unui vector.

3) Introducerea sau suprimarea în acelaşi punct a doi vectori direct opuşi.

4) Alunecarea vectorilor pe suportul lor (în cazul vectorilor glisanţi),

se numesc operaţii elementare de echivalenţă.

Definiţie. Fie S un sistem de n vectori şi S' un sistem obţinut din S prin operaţii elementare de echivalenţă. Sistemul S' se numeşte echivalent cu S şi scriem $S' \sim S$.

Propoziţie. Relaţia $\sim$ definită pe mulţimea sistemelor de vectori e o relaţie de echivalenţă, i.e. este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Definiție. Un sistem de n vectori pentru care torsorul acestuia calculat într-un punct O al spațiului este nul, i.e. $\mathcal{T}_O = 0$ sau $\vec{R} = \vec{0}$ și $\vec{M}_O = \vec{0}$, se numește sistem echivalent cu zero.

Propoziție: Torsorul este un operator liniar, invariant la operațiile elementare de echivalență pe mulțimea sistemelor de vectori înzestrată cu operația de adunare a două sisteme de vectori și de înmulțire a lor cu scalari.

Teorema lui Varignon: Momentul rezultant al unui sistem de vectori având punctele de aplicație în același punct este egal cu momentul rezultantei generale a sistemului. Acest moment rezultant are un caracter invariant față de compunerea și descompunerea vectorilor din sistem.

Teoremă. Un sistem de n vectori alunecători este reductibil la un sistem alcătuit din trei vectori aplicați în trei puncte arbitrare din spațiu necoliniare, iar acest sistem la rîndul său se poate reduce la un altul format doar din doi vectori, dintre care unul e aplicat într-un punct arbitrar.

Teoremă: Condiția necesară și suficientă ca un sistem de n vectori glisanți $(\vec{v})$ să fie echivalent cu 0 este ca torsorul său, calculat în indiferent care punct din spațiu, să fie zero, i.e. $\vec{R} = \vec{0}$ și $\vec{M}_O = \vec{0}$.

Teoremă: Condiția necesară și suficientă ca două sisteme de vectori glisanți $(\vec{v})$ și $(\vec{v}')$ să fie echivalente este ca torsorul lor calculat față de un punct O, oarecare din spațiu, să fie același, i.e.

$$\mathcal{T}_O(\vec{v}) = \mathcal{T}_O(\vec{v}').$$

Axa centrală a unui sistem de vectori: Se numește axă centrală a unui sistem de vectori locul geometric al punctelor din spațiu în care torsorul este minim, i.e. $\mathcal{T}_\Delta = (\vec{R}, \vec{P})$.

Ecuația vectorială și ecuațiile scalare ale axei centrale Δ sînt:

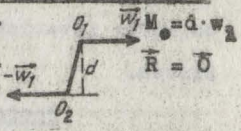
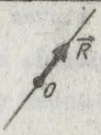
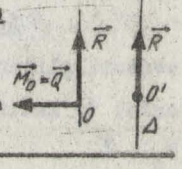
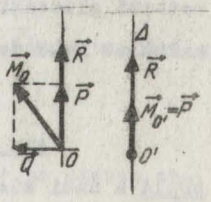
Cda. 236/987 Fasc. 6

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

1) $\vec{F} \times \vec{R} = \vec{M}_0 - \lambda \vec{R}$;

2) $$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z}$$

Clasificarea sistemelor de vectori în funcție de torsorul lor:

Nr. crt.	Rezultanta	Momentul rezultant	Scalarul torsorului	Descrierea sistemului de vectori	$\mathcal{S}_0$	$\mathcal{S}_{0'}, 0' \in \Delta$
0	1	2	3	4	5	6
1	$\vec{R} = \vec{0}$	$\vec{M}_0 = \vec{0}$	$\vec{R}\vec{M}_0 = 0$	Sistemul de vectori este echivalent cu zero; vectorii își fac echilibru	0 •	0' •
2	$\vec{R} = \vec{0}$	$\vec{M}_0 \neq \vec{0}$	$\vec{R}\vec{M}_0 = 0$	Sistemul de vectori este echivalent cu un cuplu rezultant de moment M_0		
3	$\vec{R} \neq \vec{0}$	$\vec{M}_0 = \vec{0}$	$\vec{R}\vec{M}_0 = 0$	Sistemul de vectori este echivalent cu o rezultantă unică $\vec{R}$ aplicată în O		
4a	$\vec{R} \neq \vec{0}$	$\vec{M}_0 \neq \vec{0}$	$\vec{R}\vec{M}_0 = 0$	Sistemul de vectori este echivalent cu un vector unic $\vec{R}$ aplicat în lungul axei centrale Δ		
4b	$\vec{R} \neq 0$	$\vec{M}_0 \neq 0$	$\vec{R}\vec{M}_0 \neq 0$	Sistemul de vectori este "echivalent" cu un "șurub" sau "dinamă" având $\vec{R}$ și $\vec{P}$ dirijați în lungul axei centrale Δ Mai spunem că sistemul de vectori se reduce la un torsor minim		

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Cazuri particulare de sisteme de vectori

1) Vectori avînd acelaşi punct de aplicaţie O sau superturile lor concurente în acelaşi punct O:

Torsorul în O are componentele: $\vec{R}$ şi $\vec{M}_o = \vec{0}$. Axa centrală are ecuaţia $\vec{r} = \lambda \vec{R}$ şi trece prin O.

2) Sisteme de vectori paraleli în spaţiu

1. Fie un sistem de vectori paraleli în spaţiu $\vec{v}_1 = v_1\vec{u}$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_2\vec{u}, \ldots, \vec{v}_n = v_n\vec{u}$, aplicaţi în punctele $A_i(\vec{r}_i)$, $i = \overline{1,n}$. Se numeşte centru al vectorilor paraleli punctul C care are vectorul de poziţie:

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sum\limits_{i=\overline{1,n}} v_i} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{r}_i \right), \quad \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 0 \qquad (1)$$

2. Poziţia punctului C nu depinde de direcţia vectorilor $\vec{v}_i$.

3. Poziţia punctului C nu se modifică atunci cînd toţi vectorii sistemului se măresc sau se micşorează în acelaşi raport.

4. Centrul vectorilor paraleli C este un punct a cărui poziţie nu depinde de sistemul de axe la care raportăm sistemul de vectori.

5. Torsorul unui sistem de vectori paraleli calculat în $O \in \mathbb{R}^3$ este:

$$\mathcal{T}_o: \begin{cases} \vec{R} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} v_i \right) \vec{u}, \\ \vec{M}_o = \vec{\rho} \times \vec{R}. \end{cases}$$

6. Dacă $\vec{R} \neq 0$, sistemul de vectori se reduce la un vector unic aplicat în lungul axei centrale (forma minimă a torsorului). Punctul lui de aplicaţie C al acestui vector unic are vectorul de poziţie dat de (1). Axa centrală este supertul rezultantei, trece prin C şi are direcţia comună a tuturor vectorilor.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

7. Dacă $\vec{R} = \vec{0}$, iar $\vec{M}_0 \neq \vec{0}$, sistemul de vectori e echivalent cu un cuplu, al cărui plan conţine direcţia comună a vectorilor sistemului.

8. Dacă $\vec{R} = \vec{0}$ şi $\vec{M}_0 = \vec{0}$ sistemul de vectori este echivalent cu zero.

9. Teoremă. Un sistem de vectori paraleli (cu aceeaşi direcţie) are scalarul torsorului nul, i.e. $\vec{R}\vec{M}_0 = 0$.

3) Sisteme de vectori situaţi în acelaşi plan

1. Dacă vectorii unui sistem se află toţi într-un acelaşi plan P, atunci torsorul în O se compune dintr-un vector rezultant situat în planul P şi dintr-un cuplu rezultant având planul său paralel cu planul P şi momentul perpendiculat pe planul forţelor.

2. Torsorul minim se reduce la vectorul rezultant (diferit de zero) aplicat în lungul axei centrale, axă ce are ecuaţia vectorială

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_0. \qquad (\Delta)$$

4) Sisteme de vectori paraleli situaţi în acelaşi plan

Un asemenea sistem se poate reduce:

i) la o rezultantă unică $\vec{R} \neq \vec{0}$ sau

ii) la un cuplu de moment $\vec{M}_0 \neq \vec{0}$ sau

iii) la un sistem echivalent cu zero, care are deci

$$\vec{R} = 0 \quad \text{şi} \quad \vec{M}_0 = \vec{0}.$$

2.1.2. Probleme

6o. (Un sistem de forţe pentru care $\vec{R} = \vec{0}$ şi $\vec{M} = \vec{0}$). Asupra unui cub OABCDEGH de muchie a acţionează sistemul de 6 forţe, reprezentate în figură, de intensităţi $F_1 = 3$ F; $F_2 = 3$ F; $F_3 = 3$ F; $F_4 = 3$ F; $F_5 = 3$ F, $F_6 = 3$ F.
Să se efectueze reducerea sistemului de forţe faţă de punctul O.

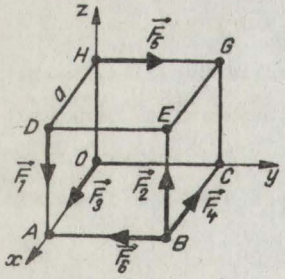


Fig.2.2.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

61. (<u>Un sistem de forţe pentru care $\vec{R} = \vec{0}$ şi $\vec{M} \neq \vec{0}$</u>). Fie un paralelipiped dreptunghic OABCDGH de dimensiuni a,b,c asupra căruia acţionează sistemul de 4 forţe reprezentat în figură. Să se efectueze reducerea acestui sistem în O, ştiind că $\vec{F}_1 = (\frac{a}{2}, 0, 0)$, $\vec{F}_2 = (-\frac{a}{2}, 0, 0)$, $\vec{F}_3 = (0, b, \frac{a}{2})$ şi $\vec{F}_4 = (0, -b, -\frac{a}{2})$.

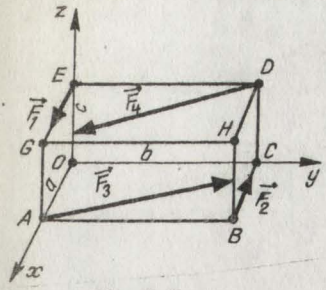


Fig.2.3.

62. (<u>Un sistem de vectori pentru care $\vec{R} \neq \vec{0}$ şi $\vec{M} = \vec{0}$</u>). Trei forţe $\vec{F}_1(F,0,0)$, $\vec{F}_2(0,2F,0)$, $\vec{F}_3(0,0,3F)$ acţionează în lungul a trei drepte paralele cu axele de coordonate în punctele $A_1(0,a_1,0)$ $A_2(0,0,a_2)$ şi $A_3(a_3,0,0)$. Să se afle condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul de forţe să se reducă la o rezultantă unică $\vec{R}$ în lungul axei centrale, să se afle $\vec{R}$, să se afle unghiurile pe care $\vec{R}$ le face cu axele de coordonate şi distanţa d de la originea O a reperului pînă la axa centrală△.

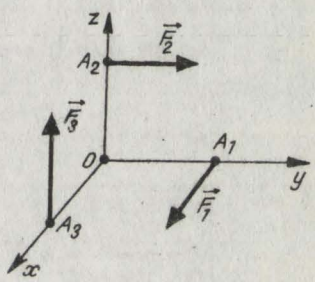


Fig.2.4.

63. (<u>Un sistem de forţe pentru care $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{M} \neq \vec{0}$ şi $\vec{RM} = 0$</u>) Fie forţele $F_2(0, 2F, 0)$ şi $F_3(0,0,3F)$ aplicate în O, împreună cu un moment $\vec{M}_1(M,0,0)$. Să se găsească torsorul în O, momentul minim şi ecuaţiile axei centrale.

64. (<u>Sisteme de vectori pentru care $\vec{RM} \neq 0$</u>)

1) Fie paralelipipedul ABCDA'B'C'D' din figură, de dimensiuni a,b,c, căruia îi este aplicat sistemul de vectori desenat în figură,

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

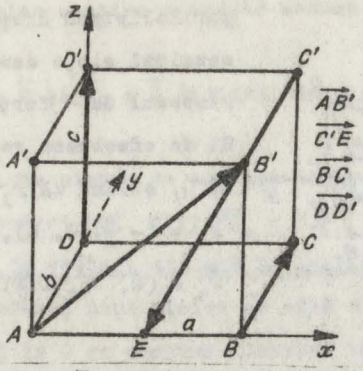


Fig.2.5.

vectorii având lungimile lor egale cu lungimile segmentelor de dreaptă pe care sînt aşternuţi.

Să se afle torsorul în A, ecuaţiile axei centrale şi momentul minim.

2) Se dă un paralelipiped dreptunghic OADBCEGH de laturi OA = ma, OB = na, OC = pa, a, m, n, p $\in \mathbb{R}_+^*$. Asupra lui acţionează forţele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$ ca în figură, de intensităţi egale F.

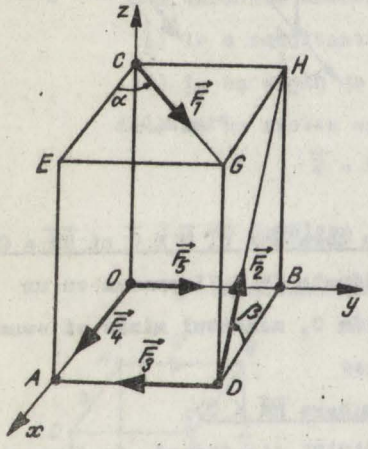


Fig.2.6.

Să se determine:

1) $\mathcal{C}_O$ (torsorul în O).

2) Cu ce este echivalent sistemul?

3) Ecuaţiile axei centrale Δ.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Se dă un cub ABCDA'B'C'D' de muchie a, asupra căruia acţionează forţele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ ca în figură, care au intensităţile $F_1 = F_4 = \alpha a$, $F_2 = F_3 = \alpha a\sqrt{2}$, α fiind un coeficient de proporţionalitate.

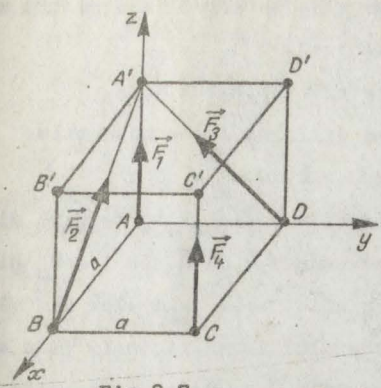


Fig.2.7.

Să se determine:

i) $\mathcal{T}_A$ (i.e. torsorul în A).

ii) Cu ce este echivalent sistemul? Care e momentul minim?

iii) Ecuaţiile axei centrale Δ.

iv) $\mathcal{T}_{O'}$, unde $O' \in \Delta$.

4) Se consideră un con circular drept având raza cercului de bază r şi înălţimea VO = h, supus sistemului de 5 forţe reprezentat în figură, forţele având aceeaşi intensitate F:

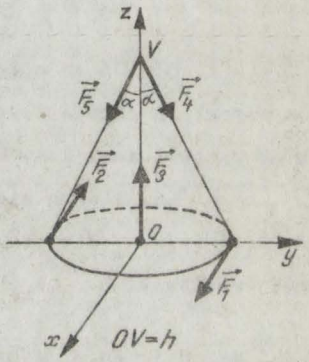


Fig.2.8.

i) Să se afle $\mathcal{T}_O$

ii) Momentul minim

iii) Ecuaţiile axei centrale Δ.

5) Fie o sferă de rază a şi centru O supusă acţiunii sistemului de 7 forţe din figură. Ştiind că toate forţele au aceeaşi intensitate F, să se afle torsorul în O al acestui sistem de forţe, momentul minim şi ecuaţiile axei centrale Δ.

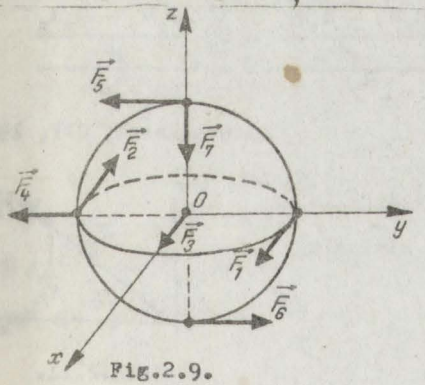


Fig.2.9.

6) Fie cubul din figură de latură a, asupra căruia acţionează 6 forţe reprezentate prin vectorii $\vec{v}_1 - \vec{v}_6$, care au originile lor în punctele specificate, iar lungimile

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

egale cu cele ale segmentelor OA_1, A_1A_2, A_3A_4, A_4A_5, A_3A_6 și A_2A_6.

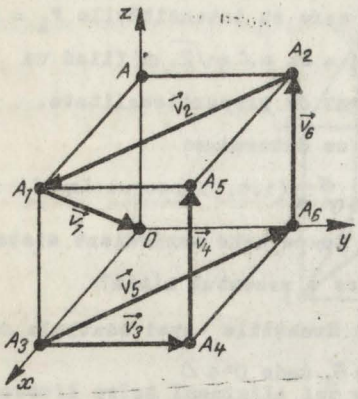


Fig.2.1e.

a) Să se afle torsorul în O pentru sistemul de vectori $\vec{v}_1 - \vec{v}_6$.

b) Să se afle torsorul în A.

c) Să se verifice legea momentelor

$$\vec{M}_A = \vec{M}_o + \overline{AO} \times \vec{R}$$

d) Să se afle scalarul torsorului și cele două componente $\vec{P}$ și $\vec{Q}$ ale lui $\vec{M}_o$ și $\vec{M}_A$.

e) Să se afle locul punctelor din $\mathbb{R}^3$ care dau torsorului forma minimală (sau minimă).

f) Să se afle $\vec{M}_{O'}$, unde O' aparține axei centrale Δ .

Examen 1985

65. Să se afle locul geometric al punctelor din spațiul $\mathbb{R}^3$ în raport cu care a doua componentă vectorială a torsorului unui sistem de vectori dați i.e. $\vec{M}$, să aibă un modul constant.

66. Fie un sistem de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, aplicate în punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ din $\mathbb{R}^3$. Dacă el se reduce față de un punct O la o forță rezultantă $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$ și la un moment $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i =$ $= (M_x, M_y, M_z)$, cu $\vec{r}_i = \overrightarrow{OA}_i$, atunci ecuațiile axei centrale se mai scriu

$$\frac{x - \frac{R_y M_z - R_z M_y}{R^2}}{R_x} = \frac{y - \frac{R_z M_x - R_x M_z}{R^2}}{R_y} = \frac{z - \frac{R_x M_y - R_y M_x}{R^2}}{R_z}$$

Al.Stoenescu, GMF, 1957

67. (<u>Compunerea a doi torsori în O</u>)

Să se afle rezultanta a doi torsori minimali concurenți în O (vedeți figura)

$\mathcal{T}_1 = (\vec{R}_1, \vec{M}_1)$ $\mathcal{T}_2 = (\vec{R}_2, \vec{M}_2)$

care fac între ei unghiul α.

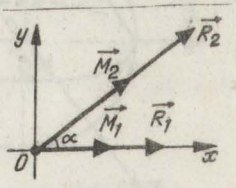


Fig.2.11.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

68. Se consideră sistemul de forţe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$ aplicate în lungul muchiilor unui cub de latură a, ca în figură. Să se determine condiţiile necesare şi suficiente pe care trebuie să le îndeplinească forţele a.î.:

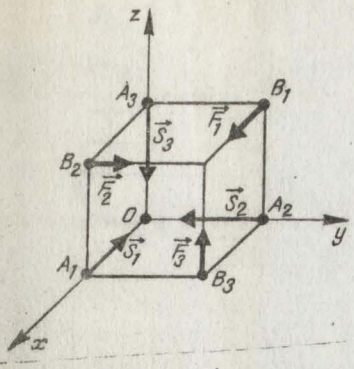


Fig.2.12.

α) Sistemul să fie echivalent cu zero.

β) Sistemul să se reducă la o forţă unică.

γ) Sistemul să se reducă la un cuplu.

69. (Sisteme de vectori paraleli în spaţiu)

1) În vîrfurile A,B,C şi O ale unei plăci pătrate rigide OABC de latură a, de greutate neglijabilă, acţionează forţele verticale $\vec{F}$, $2\vec{F}$, $3\vec{F}$, $4\vec{F}$. Să se determine punctul D(x,y,e) în care, placa fiind susţinută cu ajutorul unui fir, aceasta rămîne în poziţie orizontală.

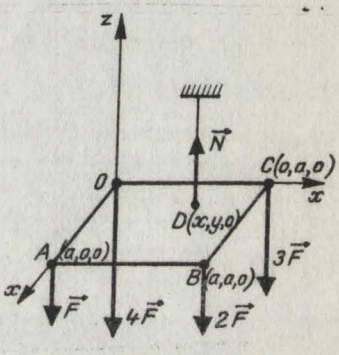


Fig.2.13.

2) In vîrful O al pătratului OABC este aplicată o forţă dirijată perpendicular pe planul pătratului, de mărime 4F, ca în figură. Se cer forţele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ aplicate în A, B, C, şi paralele cu $4\vec{F}$, a.î. sistemul de patru forţe să fie în echilibru.

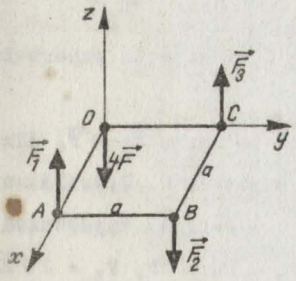


Fig.2.14.

3) Fie paralelogramul OABC, de laturi OA = a, OC = b şi OA' = h. In punctele O, A, B, C se aplică forţele paralele cu Oz şi anume $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ de modul egale cu F şi cu sensurile indicate în figura 2.15.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

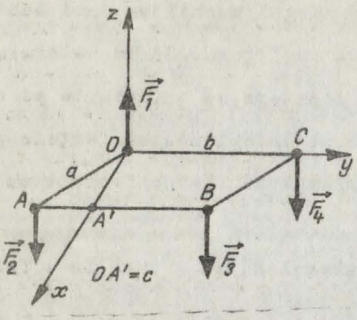


Fig.2.15.

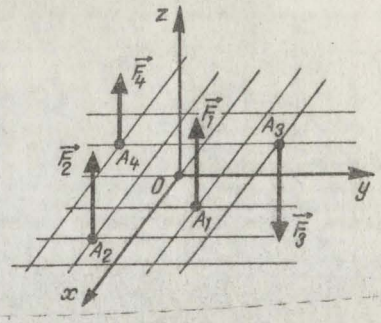


Fig.2.16.

Se cere rezultantelor $\bar{R}$ și centrul forțelor paralele.

4) Fie sistemul de forțe paralele cu Oz

$\bar{F}_1 = 5\bar{F}$; $\bar{F}_2 = 2\bar{F}$; $\bar{F}_3 = 3\bar{F}$; $\bar{F}_4 = 4\bar{F}$, aplicate în punctele $A_1(a,a,0)$, $A_2(2a,-a,0)$, $A_3(-a,2a,0)$ și $A_4(-a,-2a,0)$, ca în figura alăturată. Să se afle:(vedeți figura 2.16.):

α) z_0; β) ecuațiile suportului rezultantei; γ) centrul acestor forțe paralele.

7o. (<u>Sisteme de vectori situați în același plan</u>)

1) Fie rombul ABCD din figură, de semidiagonale a și 2a, acționat de forțele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$, $\bar{F}_5$ aplicate în punctele A,B,C și D și care au intensitățile:

$F_1 = mF$, $F_2 = nF$, $F_3 = pF$, $F_4 = qF$ și

$F_5 = rF$.

Se cere torsorul în O și ecuația suportului rezultantei.

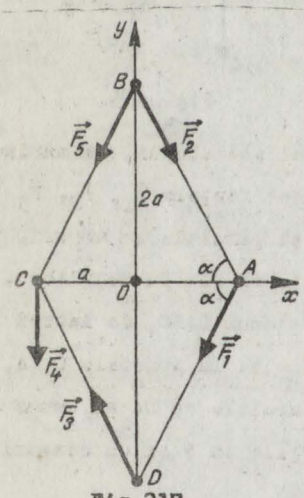


Fig.2.17.

2) Fie sistemul de forțe $\bar{F}_1 - \bar{F}_4$ din figură, aplicate în punctele O, C, B. Să se afle torsorul în O și ecuația suportului rezultantei, dacă $F_1 = F_2 = 2P$, $F_3 = 2\sqrt{2}P$, $F_4 = \sqrt{5}P$, (vedeți figura 2.18.).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

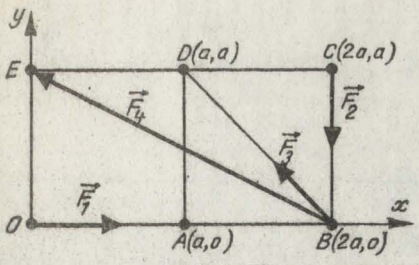


Fig.2.18.

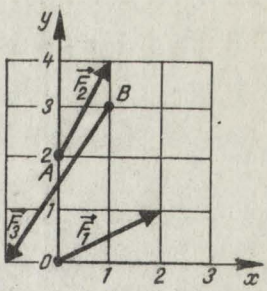


Fig.2.19.

3) Fie sistemul de forțe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ din planul $\mathbb{R}^2$, de intensități $F_1 = \sqrt{5}F$, $F_2 = \sqrt{5}F$, $F_3 = \sqrt{13}F$, aplicate în O(0,0), A(0,2) și B(1,3). Să se determine (vedeți figura 2.19.)

α) $\mathcal{G}_o$

β) Ecuația supertului rezultantei

γ) Să se verifice teorema lui Varignon în raport cu un punct al supertului rezultantei.

4) După cele 4 laturi ale unui pătrat ABCD acționează patru forțe având aceeași intensitate, reprezentată prin lungimea a a laturilor pătratului, ca în figură.

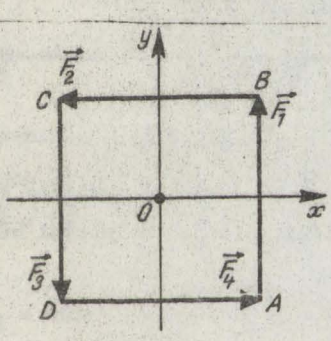


Fig.2.2o.

Reduceți acest sistem de forțe față de centrul O al pătratului ABCD.

71. (Sisteme de vectori coplanari paraleli)

1) Pe axa Ox se consideră punctele echivalente $A_o(a,o)$, $A_1(a+h,0,\ldots,$ $\ldots,A_{n-1}(a+(n-1)h,0)$, $h > o$, în care se aplică forțele paralele cu Oy de intensități F, 2F,...,nF de același sens. Se cere mărimea rezultantei și punctul ei de aplicație.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

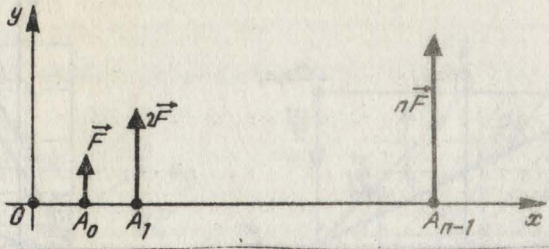


Fig.2.21.

2) Fie sistemul de 6 forţe paralele, situate în planul xOy, din figură. Calculaţi torsorul în O şi poziţia centrului forţelor paralele.

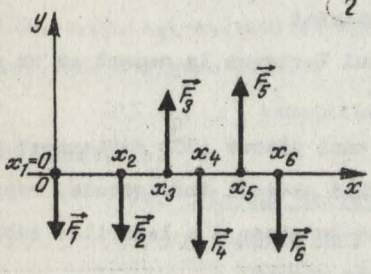


Fig.2.22.

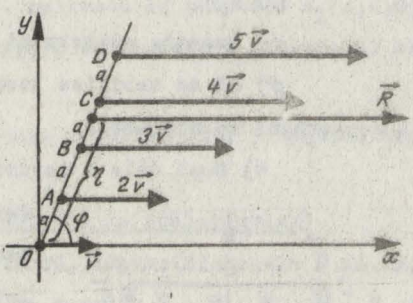


Fig.2.23.

3) Să se afle vectorul rezultant şi supertul acestuia pentru sistemul de vectori alunecători, paraleli, situaţi în planul xOy, din figură.

2.1.3. **Rezolvarea problemelor**

6o. Fie deci O punctul în care calculăm torsorul (vedeţi figura 2.2). Avem:

$\vec{F}_1 = (0,0,-3F)$; forţa $\vec{F}_1$ e aplicată în D(a,e,a); $\overline{OD} = a\vec{i}+a\vec{k}$

$\vec{F}_2 = (0,0,3F)$; " $\vec{F}_2$ " " " B(a,a,0); $\overline{OB} = a\vec{i}+a\vec{j}$

$\vec{F}_3 = (3F,0,0)$; " $\vec{F}_3$ " " " O;

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$\vec{F}_4 = (-3F,0,0)$; forţa $\vec{F}_4$ e aplicată în $B(a,a,0)$; $\overrightarrow{OB} = a\vec{i}+a\vec{j}$

$\vec{F}_5 = (0,3F,0)$; " $\vec{F}_5$ " " " $H(a,a,a)$; $\overrightarrow{OH} = a\vec{k}$

$\vec{F}_6 = (0,-3F,0)$; " $\vec{F}_6$ " " " $B(a,a,0)$.

Acum $\vec{R}$ are proiecţiile: $R_x = \sum_{i=1}^{6} F_{ix} = 3F - 3F = 0$;

$$R_y = \sum_{i=1}^{6} F_{iy} = 3F - 3F = 0;$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{6} F_{iz} = -3F + 3F = 0.$$

Deci $\vec{R} = \vec{0}$.

Calculăm momentele forţelor faţă de O. Avem de pildă:

$$\vec{M}_1 = \overrightarrow{OD} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & a \\ a & a & -3F \end{vmatrix} = 3aF\vec{j}.$$ Analog găsim

$\vec{M}_2 = 3aF(\vec{i}-\vec{j})$; $\vec{M}_3 = \vec{0}$; $\vec{M}_4 = 3aF\vec{k}$, $\vec{M}_5 = -3aF\vec{i}$; $\vec{M}_6 = -3aF\vec{k}$.

Deci $\mathcal{C} = (\vec{0}, \vec{0})$ şi sistemul de forţe este echivalent cu zero, adică forţele îşi fac echilibru.

61. Dacă avem în vedere proiecţiile forţelor date, atunci componentele vectoriale ale torsorului în O se obţin imediat (vedeţi figura 2.3)

$\vec{R} = (\frac{a}{2} - \frac{a}{2}, b-b, \frac{c}{2} - \frac{c}{2}) = \vec{0}$;

$$\vec{M}_1 = \overrightarrow{OE} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & a \\ \frac{a}{2} & a & a \end{vmatrix} = \frac{ac}{2}\vec{j}, \quad \vec{M}_2 = \overrightarrow{OB} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & a \\ -\frac{a}{2} & a & a \end{vmatrix} = \frac{ab}{2}\vec{k},$$

$$\vec{M}_3 = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & a \\ a & b & \frac{c}{2} \end{vmatrix} = -\frac{ac}{2}\vec{j} + ab\vec{k}, \quad \vec{M}_4 = \overrightarrow{OD} \times \vec{F}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & a \\ a & -b & -\frac{c}{2} \end{vmatrix} = \frac{bc}{2}\vec{i};$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4 = \frac{bc}{2}i + \frac{3ab}{2}\vec{k}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Deci $\mathcal{T}_0 = (\vec{0}, \frac{bc}{2}\vec{i} + \frac{3ab}{2}\vec{k})$, i.e. sistemul este echivalent cu un cuplu unic de moment $M = \frac{b}{2}\sqrt{c^2 + 9a^2}$

62. Elementele torsorului în O sînt (vedeţi figura 2.4.):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \text{ i.e.}$$

$$\vec{R} = F(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}), \text{ şi}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3, \text{ i.e.}$$

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a_1 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 2F & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3F \end{vmatrix} =$$

$$= -F(2a_2\vec{i} + 3a_3\vec{j} + a_1\vec{k}).$$

Pentru ca sistemul de forţe să se reducă la o rezultantă unică $\vec{R}$ în lungul axei centrale e necesar şi suficient ca momentul minim să fie nul, i.e. $\vec{M}_0 \frac{\vec{R}}{R} = 0$, adică $-F^2(2a_2 + 6a_3 + 3a_1) = 0$ sau $3a_1 + 2a_2 + 6a_3 = 0$.

Evident $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\, F = \sqrt{14}\, F$.

Cosinusurile unghiurilor pe care $\vec{R}$ le face cu axele de coordonate sînt proiecţiile versorului lui $\vec{R}$, pe axele de coordonate:

$$\vec{u} = \frac{\vec{R}}{R} = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}) \text{ i.e.}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

De aici se dedue unghiurile α, β şi γ.

Acum $M_0 = \sqrt{4a_2^2 + 9a_3^2 + a_1^2}\, F$.

Fie O' un punct al axei centrale. Atunci avem $\vec{M}_{0'} = \vec{M}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}$. Dar $\vec{M}_{0'} = \vec{0}$. Rezultă $M_0 = |\overrightarrow{O'O} \times \vec{R}|$, adică $M_0 = d(O,\Delta) \cdot R$ şi deci

$$d(O,\Delta) = \frac{M_0}{R} = \frac{\sqrt{a_1^2 + 2a_2^2 + 9a_3^2}}{\sqrt{14}}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

63. Componantele vectoriale ale torsorului în O sînt:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F(2\vec{j} + 3\vec{k}),$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 = M\vec{i}.$$

Momentul minim este zero, fiindcă

$$\frac{\vec{M}\cdot\vec{R}}{R} = \frac{0\cdot M + 0\cdot 2F + 0\cdot F}{\sqrt{13}\,F} = 0.$$

Ecuaţiile scalare ale axei centrale se obţin proiectînd $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_0 - \lambda\vec{R}$ pe axe şi anume:

$$yR_z - zR_y = M_x - \lambda R_x \; ; \; zR_x - xR_z = M_y - \lambda R_y ; \; xR_y - yR_x = M_z - \lambda R_z ;$$

în final găsim:

$$x = 0 \quad \text{şi} \quad y = \frac{2}{3}z + \frac{M}{3F}$$

64. 1) Conform figurii 2.5, asupra corpului paralelipipedic acţionează următorii vectori, pentru care indicăm şi punctele de aplicaţie ale acestora:

$\overrightarrow{AB'}(a,0,c)$; $A(0,0,0)$;

$\overrightarrow{DD'}(0,0,c)$; $D(0,b,0)$, $\overrightarrow{AD} = b\vec{j}$;

$\overrightarrow{BC}(0,b,0)$, $B(a,0,0)$; $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$;

$\overrightarrow{C'E}(-\frac{a}{2}, -b, -c)$, $C'(a,b,c)$; $\overrightarrow{AC'} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Acum găsim imediat pe $\vec{R} = (a - \frac{a}{2})\vec{i} + (b-b)\vec{j} + (-c + 2c)\vec{k} = \frac{a}{2}\vec{i} + c\vec{k}$; $R_x = \frac{a}{2}$, $R_y = 0$, $R_z = c$.

Momentele individuale se calculează după definiţie, iar momentul rezultant este egal cu suma momentelor individuale ale vectorilor:

$$\vec{M} = \vec{i}bc + \frac{ac}{2}\vec{j} + \frac{ab}{2}\vec{k}.$$

Deci $\mathcal{E}_A = (\frac{a}{2}\vec{i} + c\vec{k},\ bc\vec{i} + \frac{ac}{2}\vec{j} + \frac{ab}{2}\vec{k})$

Ecuaţiile axei centrale $\triangle$ sînt $2cx - az + ac = 0$ şi $y = \frac{b(4c^2 - a^2)}{4c^2 + a^2}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Scalarul torsorului $\vec{R}\vec{M} \neq 0$. Deci sistemul e echivalent cu o dinamă.

Valoarea momentului minim este egal cu $\vec{M} \cdot \frac{\vec{R}}{R} = \frac{2abc}{\sqrt{a^2+4c^2}}$,

respectiv $\vec{P} = \frac{2abc}{\sqrt{a^2+4c^2}} \cdot \frac{\vec{R}}{R}$.

2) 1) Scriem forţele cu proiecţiile lor pe axe şi cu punctele respective de aplicaţie (vedeţi figura 2.6.):

$\vec{F}_1 = (F\cos\alpha, F\sin\alpha, 0)$, $C(0,0,ap)$; $\vec{OC} = ap\,\vec{k}$; $\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$

$\sin\alpha = n/\sqrt{m^2+n^2}$

$\vec{F}_2 = (-F\cos\beta, 0, F\sin\beta)$, $D(am, an, 0)$; $\vec{OD} = am\vec{i} + an\vec{j}$;

$\cos\beta = \frac{m}{\sqrt{m^2+p^2}}$, $\sin\beta = p/\sqrt{m^2+p^2}$.

$\vec{F}_3 = (0, -F, 0)$; $D(am, an, 0)$; $\vec{OD} = am\vec{i} + an\vec{j}$

$\vec{F}_4 = (F, 0, 0)$, $O(0, 0, 0)$;

$\vec{F}_5 = (0, F, 0)$, $O(0, 0, 0)$.

Acum $\vec{R} = (\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z) = (F(1+\cos\beta-\cos\alpha); F\sin\alpha; F\sin\beta)$ (1)

Calculăm momentele forţelor:

$$\vec{M}_1 = \vec{OC} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & ap \\ F\cos\alpha & F\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = -apF\sin\alpha\,\vec{i} + apF\cos\alpha\,\vec{j};$$

$$\vec{M}_2 = \vec{OD} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ am & an & 0 \\ -F\cos\beta & 0 & F\sin\beta \end{vmatrix} = anF\sin\beta\,\vec{i} - amF\sin\beta\,\vec{j} + anF\cos\beta\,\vec{k};$$

$$\vec{M}_3 = \vec{OD} \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ am & an & 0 \\ 0 & -F & 0 \end{vmatrix} = -amF\vec{k}; \quad \vec{M}_4 = \vec{M}_5 = \vec{0}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Acum $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4 + \vec{M}_5 = a\,F(n\sin\beta - p\sin\alpha)\vec{i} +$

$+ aF(p\cos\alpha - m\sin\beta)\vec{j} + aF(n\cos\beta - m)\vec{k}$ (2)

Deci $\mathcal{T}_0 = (\vec{R}, \vec{M})$, cu componentele date de formulele (1) şi (2).

2) Calculăm scalarul torsorului şi găsim:

$$\vec{R}\vec{M} = aF^2\left[-m(\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta) + n\left[\sin\beta + \sin 2\beta - \sin\beta\cos\alpha\right] + p\left[\sin 2\alpha - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sin\alpha - \sin\alpha\cos\beta\right]\right]$$

In general sistemul corespunde unei <u>dinane</u>.

3) Ecuaţiile axei centrale Δ

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z}$$

se scriu în mod concret imediat. Ele nu prezintă nici o particularitate.

3) i) Scriem proiecţiile forţelor considerate, coordonatele punctelor lor de aplicaţie şi vectorii de poziţie ai punctelor lor de aplicaţie (vedeţi figura 2.7):

$\vec{F}_1 = (0, 0, \alpha a)$, $A(0, 0, 0)$;

$\vec{F}_2 = (-\alpha a, 0, \alpha a)$, $B(a, 0, 0)$, $\vec{AB} = a\vec{i}$;

$\vec{F}_3 = (0, -\alpha a, \alpha a)$, $D(0, a, 0)$, $\vec{AD} = a\vec{j}$;

$\vec{F}_4 = (0, 0, \alpha a)$, $C(a, a, 0)$, $\vec{AC} = a\vec{i} + a\vec{j}$.

Acum $\vec{R} = (\sum F_{ix}, \sum F_{iy}, \sum F_{iz}) = (-\alpha a, 0, 4\alpha a)$.

Calculăm momentele individuale

$\vec{M}_1 = \vec{0}$, $\vec{M}_2 = \vec{AB} \times \vec{F}_2 = -\alpha a^2\vec{j}$; $\vec{M}_3 = \vec{AD} \times \vec{F}_3 = \alpha a^2\vec{i}$;

$\vec{M}_4 = \vec{AC} \times \vec{F}_4 = \alpha a^2\vec{i} - \alpha a^2\vec{j}$ şi apoi pe cel rezultant:

$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4 = 2\alpha a^2\vec{i} - 2\alpha a^2\vec{j}$.

Deci

$$\mathcal{T}_A = (\vec{R} = -\alpha a\vec{i} + 4\alpha a\vec{k},\ \vec{M} = 2\alpha a^2(\vec{i} - \vec{j})).$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

ii) Scalarul torsorului este $\vec{R}\vec{M} = -2\alpha^2 a^3 \neq 0$.

Deci sistemul are caracterul unei dinamе, iar

$$|P| = |M_{mom.min.}| = \left|\vec{M}\cdot\frac{\vec{R}}{R}\right| = \left|\frac{-2\alpha^2 a^3}{\alpha a\sqrt{17}}\right| = \frac{2\alpha a^2}{\sqrt{17}}$$

iii) Ecuaţiile scalare ale axei centrale Δ se obţine proiectînd ecuaţia ei vectorială $\vec{M} - \vec{r} \times \vec{R} = \lambda \vec{R}$ pe axe şi avînd în vedere că $R_x = -\alpha a$, $R_y = 0$, $R_z = 4\alpha a$, $M_x = 2\alpha a^2$, $M_y = -2\alpha a^2$ şi $M_z = 0$; rezultă

$$\begin{cases} 2\alpha a^2 - 4\alpha ay = -\lambda\alpha a \\ -2\alpha a^2 + \alpha az + 4\alpha ax = \lambda \cdot 0 \\ -\alpha ay = \lambda \cdot 4\alpha a \end{cases} \quad \text{sau} \quad y = \frac{8a}{17},\ z = 2a - 4x.$$

iv) Fie $O'(x,y,z)$ un punct al axei centrale Δ ; vom avea:

$$\mathcal{T}_{O'} = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_{O'} = \vec{M} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R} \end{cases} = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_{O'} = -\frac{2\alpha a^2}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\vec{R}}{R} \end{cases}$$

4) i) $\vec{R} = F(1-2\cos\alpha)\vec{k}$, $\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}$; $\vec{M} = -2rF\vec{k}$ (vedeţi figura 2.8.).

ii) $M_{minim} = -2rF$

iii) $x = 0$ şi $y = 0$.

5) In reperul $Oxyz$, forţele care acţionează asupra sferei împreună cu punctele lor de aplicaţie sînt (vedeţi figura 2.9.):

$\vec{F}_1(F, 0, 0)$ în $A(0, a, 0)$;

$\vec{F}_2(-F, 0, 0)$ în $B(0, -a, 0)$;

$\vec{F}_3(F, 0, 0)$ în $O(0, 0, 0)$;

$\vec{F}_4(0, -F, 0)$ în $B(0, -a, 0)$;

$\vec{F}_5(0, -F, 0)$ în $C(0, 0, a)$; $\vec{F}_6(0, F, 0)$ în $D(0, 0, -a)$ şi

$\vec{F}_7(0, 0, -F)$ în $C(0, 0, a)$. Făcînd suma proiecţiilor de acelaşi nume ale forţelor sistemului găsim:

$$\vec{R} = F\vec{i} - F\vec{j} - F\vec{k}.$$

Pentru a doua componentă vectorială a torsorului în O găsim

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Pentru a doua componentă vectorială a torsorului în O găsim

$$\vec{M} = 2aF(\vec{i} - \vec{k}).$$

Deci

$$R_x = F,\ R_y = -F,\ R_z = -F \quad \text{şi}$$

$$M_x = 2aF,\ M_y = 0,\ M_z = -2aF.$$

Momentul minim este

$$M_{minim} = \frac{\vec{R}\vec{M}}{R} = \frac{4aF^2}{F\sqrt{3}} = \frac{4aF}{\sqrt{3}}$$

Ecuaţiile planelor care definesc prin intersecţia lor axa centrală $\triangle$ a sistemului de forţe sînt definite de

$$\frac{2aF + yF - zF}{F} = \frac{0 - zF - xF}{-F} = \frac{-2aF + xF + yF}{-F}$$

sau de $x - y + 2z = 2a$ şi $2x + y + z = 2a$.

Unghiul φ dintre $\vec{M}$ şi $\vec{R}$ este dat de

$$\cos\varphi = \frac{\vec{M}\vec{R}}{MR} = \frac{4aF}{3.2aF\sqrt{2}} = 0{,}816;\ \varphi \simeq 35^{\circ}20'.$$

6) Distribuţia sistemului de forţe aplicate cubului este (vedeţi figura 2.1o):

$\vec{v}_1(-a,0,-a)$, $A_1(a,0,a)$; $\vec{OA}_1 = a\vec{i} + a\vec{k}$; $\vec{AA}_1 = a\vec{i}$;

$\vec{v}_2(a, -a, 0)$, $A_2(0,a,a)$; $\vec{OA}_2 = a\vec{j} + a\vec{k}$; $\vec{AA}_2 = a\vec{j}$;

$\vec{v}_3(0,a, 0)$, $A_3(a, 0, 0)$; $\vec{OA}_3 = a\vec{i}$; $\vec{AA}_3 = a(\vec{i}-\vec{k})$

$\vec{v}_4(0, 0, a)$, $A_4(a, a, 0)$, $\vec{OA}_4 = a(\vec{i}+\vec{j})$, $\vec{AA}_4 = a(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$; $\vec{v}_5(-a,a,0)$;

$\vec{v}_6(0, 0, a)$; $A_6(0, a, 0)$; $\vec{OA}_6 = a\vec{j}$; $\vec{AA}_6 = a(\vec{j}-\vec{k})$

a) $\mathcal{G}_O = (a(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k});\ a^2(3\vec{i}+\vec{k}))$

b) $\mathcal{G}_A = (a(-\vec{i}+\vec{j}+k);\ a^2(4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}))$

c) $4a^2\vec{i} + a^2\vec{j} + a^2\vec{k} = (2a^2\vec{i} + a^2\vec{k}^2) + (a^2\vec{i}+a^2\vec{j})$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

d) Scalarul torsorului este $\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = -2a^3 \neq 0$.

In O avem $\vec{M}_0 = \vec{P} + \vec{Q}$, unde

$$\vec{P} = P\frac{\vec{R}}{R} = -\frac{2a^2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}\right),$$

$$\vec{Q} = \frac{26a^2}{\sqrt{78}}\left(\frac{7}{\sqrt{78}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{78}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{78}}\vec{k}\right)$$

e) $\Delta : x = x,\ y = \frac{5a}{3} - x,\ z = -\frac{2a}{3} - z,\ x \in \mathbb{R}$.

f) $\vec{M}_{O'} = -\frac{2a^2}{\sqrt{3}}\frac{\vec{R}}{R} = \vec{P}$.

65. Fie Δ axa centrală a acestui sistem de vectori şi A un punct pe ea, pe care-l considerăm ca origine a lui $\vec{R}$ şi $\vec{M}$. Fie B un punct al locului căutat. După legea de variaţie a momentelor la schimbarea polului, avem

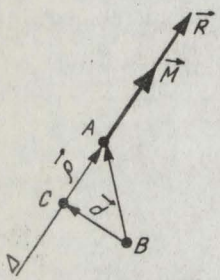


Fig.2.24.

$\vec{M}_B = \vec{BA} \times \vec{R} + \vec{M}$. Dar $\vec{BA} = \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{d} + \vec{\rho}$, unde $\vec{BC} \perp \Delta$. Deci $\vec{M}_B = (\vec{d} + \vec{\rho}) \times \vec{R} + \vec{M} = \vec{d} \times \vec{R} + \vec{M}$, căci $\vec{\rho} \times \vec{R} = \vec{0}$; observăm că $|\vec{d} \times \vec{R}| = Rd$, că $\vec{M}_B \perp \vec{d} \times \vec{R}$ şi deci $M_B^2 = R^2 d^2 + M^2$. Dacă ceream M_B = constant, atunci $d = \frac{\sqrt{C^2 - M^2}}{R}$ = constant.

Demonstrînd şi proprietatea reciprocă, adică luînd un punct B la distanţa d de axa Δ şi demonstrînd că M_B = constant, concluzionăm că locul lui B e o suprafaţă cilindrică circulară dreaptă de rază d şi axă Δ.

66. Fie legea de transformare a momentelor

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R}.$$

Fie O' un punct al axei centrale şi $\vec{OO'} = \vec{r}$ = vectorul de poziţie al lui O'. Avem

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{R} \quad \text{cu } \vec{M}_{O'} \times \vec{R} = \vec{0}.$$

Înmulţim această relaţie vectorial la dreapta cu $\vec{R}$ şi obţinem:

$$\vec{0} = \vec{M}_O \times \vec{R} - (\vec{r} \times \vec{R}) \times \vec{R} = \vec{0} \quad \text{sau}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\vec{M}_0 \times \vec{R} = \vec{R} \times (\vec{R} \times \vec{r}) \quad \text{sau} \quad \vec{M}_0 \times \vec{R} = \vec{R}(\vec{R}\vec{r}) - \vec{r}\vec{R}^2$$

De aici deducem

$$\vec{r} + \frac{\vec{M}_0 \times \vec{R}}{\vec{R}^2} = \frac{\vec{R}(\vec{R}\vec{r})}{\vec{R}^2}$$

şi prin proiecţii pe axe rezultă ecuaţiile cerute ale axei centrale.

67. Evident $\sigma_0 = (\vec{R}, \vec{M})$, cu $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ şi $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$; de aici găsim (vedeţi figura 2.11):

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos\alpha, \quad \text{respectiv}$$

$$M^2 = M_1^2 + 2M_1M_2\cos\alpha + M_2^2$$

Dacă vrem să determinăm momentul minim, trebuie să avem în vedere că $\vec{R} = (R_1 + R_2\cos\alpha, R_2\sin\alpha, 0)$ şi $\vec{M} = (M_1 + M_2\cos\alpha, M_2\sin\alpha, 0)$. Deci

$$M_{\text{minim}} \frac{\vec{R}\vec{M}}{R} = \frac{R_1M_1 + R_2M_2 + (R_1M_2 + R_2M_1)\cos\alpha}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos\alpha}}$$

Acum ecuaţiile planelor a căror intersecţie ne dă axa centrală se deduc din sistemul

$$\begin{cases} M_1 + M_2\cos\alpha + R_2\sin\alpha \cdot z = \lambda(R_1 + R_2\cos\alpha) \\ M_2\sin\alpha - (R_1 + R_2\cos\alpha)z = \lambda R_2\sin\alpha \\ -xR_2\sin\alpha + (R_1 + R_2\cos\alpha)y = 0 \end{cases}$$

şi sînt

$$(R_2\sin\alpha)x = (R_1 + R_2\cos\alpha)y, \quad z = \frac{(R_1M_2 - R_2M_1)\sin\alpha}{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos\alpha}$$

68. *a*) (Vedeţi figura 2.12): $\vec{R} = (F_1 - S_1, F_2 - S_2, F_3 - S_3)$; $\vec{R} = \vec{0} \iff F_1 = S_1$, $F_2 = S_2$ şi $F_3 = S_3$; $\vec{M}_0 = (a(F_3 - F_2), a(F_1 - F_3), a(F_2 - F_1)) = \vec{0} \iff F_1 = F_2 = F_3$; deci $\sigma_0 = 0 \iff F_1 = F_2 = F_3 = S_1 = S_2 = S_3$.

Cda 236/987 Fasc. 7

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

β) $F_1 \neq S_1$ sau $F_2 \neq S_2$ sau $F_3 \neq S_3$ și $\vec{RM}_0 = 0$.

β') $F_1 = S_1$, $F_2 = S_2$, $F_3 = S_3$ și $F_3 \neq F_2$ sau $F_1 \neq F_3$ sau $F_2 \neq F_1$.

69. 1) Vom cere ca torsorul sistemului de forțe $\vec{F}$, $2\vec{F}$, $3\vec{F}$, $4\vec{F}$, $\vec{N}$, calculat față de un punct oarecare să fie zero.

Alegem punctul O drept punct de reducere a forțelor (vedeți figura 2.13). Din $\vec{R} = \vec{0}$, găsim $N = le\ F$.

Din egalarea cu zero a celei de a doua componente a torsorului, i.e. a sumei momentelor forțelor în raport cu O,

$$M_0\vec{F} + M_0 2\vec{F} + M_0 3\vec{F} + M_0 4\vec{F} + M_0\vec{N} = \vec{0}, \quad \text{deducem}$$

$$aF\vec{j} - 2aF\vec{i} + 2aF\vec{j} - 3aF\vec{i} + leyF\vec{i} - le\ x\ F\vec{j} = \vec{0},$$

respectiv

$$x = \frac{3a}{le} \quad \text{și} \quad y = \frac{a}{2}$$

2) Sistemul de forțe este alcătuit din forțele (vedeți figura 2.14):

$\vec{F}(0,0,-4F)$ cu punctul de aplicație în O(0,0,0);

$\vec{F}_1(0,0,F_1)$ " " " " A(a,0,0);

$\vec{F}_2(0,0,-F_2)$ " " " " B(a,a,0);

$\vec{F}_3(0,0,F_3)$ " " " " C(0,a,0).

Vom cere ca torsorul în O să fie nul. Aceasta revine la

$-F_2 - 4F + F_1 + F_3 = 0$ și la

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & -F_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

sau la $-F + F_1 - F_2 + F_3 = 0$, $F_2 = F_3$ și $F_1 = F_2$.

Rezultă astfel $F_1 = F_2 = F_3 = 4F$.

3) Evident avem (vedeți figura 2.15.):

$\vec{R} = -2F\vec{k}$ ... Fie $AA' = a$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Acum centrul forţelor paralele are vectorul de poziţie:

$$\vec{\rho} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot F_2 + \overrightarrow{OB} \cdot F_3 + \overrightarrow{OC} \cdot F_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}$$

sau

$$\vec{\rho} = \frac{(h\vec{i} - c\vec{j})(-F) + (h\vec{i} + (b-c)\vec{j})(-F) + b\vec{j}(-F)}{-2F}$$

sau

$$\vec{\rho} = h\vec{i} + (b-c)\vec{j}$$

4) α) Evident (vedeţi figura 2.16) $R = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 8F$; $\vec{R} = 8F\vec{k}$.

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA_1} \times 5F\vec{k} + \overrightarrow{OA_2} \times 2F\vec{k} - \overrightarrow{OA_3} \times 3F\vec{k} + \overrightarrow{OA_4} \times 4F\vec{k} =$$

$$= (5\cdot\overrightarrow{OA_1} + 2\,\overrightarrow{OA_2} - 3\,\overrightarrow{OA_3} + 4\,\overrightarrow{OA_4}) \times F\vec{k} = -8a \cdot F\vec{j} - 11a\,F\vec{i}.$$

Deci

$$\mathcal{G}_0 = (\vec{R} = 8F\vec{k},\ \vec{M} = -11aF\vec{i} - 8aF\vec{j}.$$

β) Din teorema lui Varignon $M_O\vec{R} = \sum_{i=1}^{4} M_O\vec{F}_i$, i.e.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & 8F \end{vmatrix} = -11aF\vec{i} - 8aF\vec{j},$$

rezultă ecuaţiile suportului rezultantei.

Deci suportul este dreapta de ecuaţii:

$x = a$, $y = -\frac{11}{8}a$, paralelă cu Ox.

γ) Centrul forţelor paralele este definit de

$$\vec{\rho} = \frac{F_1\vec{\rho}_1 + F_2\vec{\rho}_2 + F_3\vec{\rho}_3 + F_4\vec{\rho}_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} = a\vec{i} - \frac{11}{8}a\,\vec{j}.$$

7o. 1) Avem (vedeţi figura 2.17): $F_{1x} = -F_1\cos\alpha$, $F_{1y} = -F_1\sin\alpha$

$F_{2x} = F_2\cos\alpha$, $F_{2y} = -F_2\sin\alpha$

$F_{3x} = -F_3\cos\alpha$, $F_{3y} = F_3\sin\alpha$

$F_{4x} = 0$, $F_{4y} = -F_4$;

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$F_{5x} = -F_5\cos\alpha,\ F_{5y} = -F_5\sin\alpha;\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Acum $R_x = (-F_1 + F_2 - F_3 - F_5)\cos\alpha$,

$$R_y = (-F_1 - F_2 + F_3 - F_4 - F_5)\sin\alpha - F_4$$

Momentele forţelor faţă de O sînt:

$\vec{M}_1 = -aF_1\sin\alpha\,\vec{k}$, $\vec{M}_2 = -2aF_2\cos\alpha\,\vec{k}$, $\vec{M}_3 = -2aF_3\cos\alpha\,\vec{k}$, $\vec{M}_4 = aF_4\vec{k}$, $\vec{M}_5 = 2aF_5\cos\alpha\,\vec{k}$, iar a doua componentă a torsorului în O are proiecţiile:

$M_x = 0$, $M_y = 0$, $M_z = -aF_1\sin\alpha - 2aF_2\cos\alpha - 2aF_3\cos\alpha + aF_4 + 2aF_5\cos\alpha$.

Ecuaţia suportului rezultantei se deduce imediat aplicînd teorema lui Varignon; ea este:

$$xR_y - yR_x = M_z \text{ etc.}$$

2) Se găseşte imediat (vedeţi figura 2.18): $\vec{R} = -2P\vec{i} + P\vec{j}$ şi $\vec{M}_O = 2aP\vec{k}$, respectiv $x + 2y = 2a$.

3) α) Rezultă imediat (vedeţi figura 2.19): $\vec{R} = F\vec{i}$, $\vec{M}_O = F\vec{k}$; $\theta_O = (F\vec{i}, F\vec{k})$.

β) Fie C(x,y) punctul de aplicaţie a lui $\vec{R}$. Avem

$$\vec{MR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} = -yF\vec{k}.$$

Acum din $\vec{MR} = \vec{M}_O$ obţinem $y = -1$ (ecuaţia suportului rezultantei, i.e. ecuaţia axei centrale Δ).

γ) Fie $O'(x, -1, 0)$ un punct al axei Δ. Avem

$\vec{M}'_1 = -(xF + 2F)\vec{k}$, $\vec{M}'_2 = -(2xF + 3F)\vec{k}$, $\vec{M}'_3 = (5F + 3xF)\vec{k}$.

Evident $\vec{M}_{O'} = \vec{M}'_1 + \vec{M}'_2 + \vec{M}'_3 = \vec{0}$, acum $\overrightarrow{O'O} \times \vec{R} = -F\vec{k}$, $\vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R} = \vec{0}$; $\vec{R} \cdot \vec{M}_{O'} = 0$.

Desenăm în continuare, pentru mai multă claritate, torsorii în O şi în O' (vedeţi figura 2.25.).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

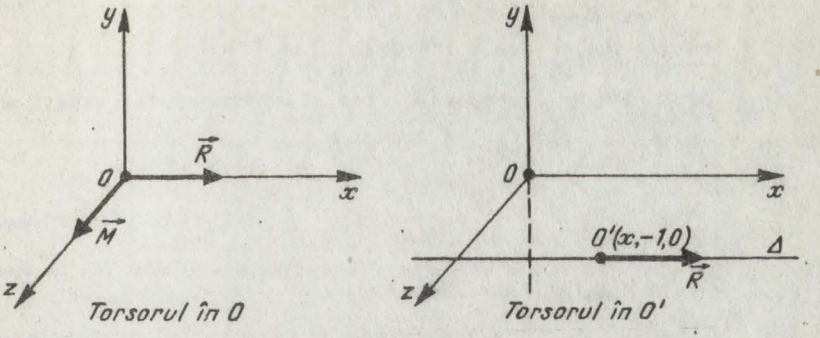


Fig.2.25.

4) Evident $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$ şi $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4 = 2a^2\vec{k}$.

Deci $\mathcal{T}_0 = (\vec{0}, 2a^2\vec{k})$ (vedeţi figura 2.2o).

71. 1) Avem imediat (vedeţi figura 2.21): $R_x = 0$, $R_y = F(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)F}{2}$

Din $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = M\vec{R}$, i.e. din $aF + 2(a+h)F + \ldots + n\left[a+(n-1)h\right]F = \frac{xn(n+1)}{2}F$,

deducem abscisa x a punctului de aplicaţie al rezultantei.

Evident ordonata acestui punct este y = 0.

2) Avem imediat (vedeţi figura 2.22.): $\vec{R} = (F_3+F_5-F_1-F_2-F_4-F_6)\vec{j}$,

$$\vec{M}_0 = (F_3x_3 + F_5x_5 - F_2x_2 - F_4x_4 - F_6x_6)\vec{k}$$

Centrul forţelor paralele are vectorul de poziţie:

$$\vec{\rho} = \frac{-x_2F_2 + x_3F_3 - x_4F_4 + x_5F_5 - x_6F_6}{-F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6}\,\vec{i}$$

şi prin acest centru trece axa centrală Δ, în lungul căreia e dirijat vectorul $\vec{R}$.

3) Se găseşte uşor $\vec{R} = 15\,\vec{v}$ (vedeţi figura 2.23.)

Scriind că suma momentelor vectorilor individuali este egală cu momentul rezultantei, găsim

$$\eta = \frac{8}{3}\,a$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Acum, faţă de reperul xOy, centrul vectorilor paraleli are coordonatele:

$$x = \frac{8a}{3}\cos\varphi \quad \text{şi} \quad y = \frac{8a}{3}\sin\varphi$$

In legătură cu compunerea forţelor concurente, vedeţi exerciţiile: 3, 4, 7, 14, 2e, 21, 26.

§ 2.2. Centre de greutate

2.2.1. Rezumat teoretic

1. Greutăţile diferiteler puncte (particule) materiale, care alcătuiesc un corp sau un sistem de corpuri materiale pot fi considerate drept forţe paralele verticale descendente. Acestea au o resultantă bine determinată, aplicată într-un punct, care se numeşte centrul de greutate (cdg) al corpului respectiv sau al sistemului de corpuri considerat.

Centrul de greutate al unui corp îl notăm cu litera C sau G.

2.2.1.1. Cazul distribuţiei discrete a masei

2. Dacă avem un sistem S de n puncte materiale $P_1, P_2, \ldots, P_n$, de vectori de poziţie $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$, de greutăţi $G_1, G_2, \ldots, G_n$, respectiv de mase

$$m_i = \frac{G_i}{g}, \quad i = \overline{1,n},$$

atunci vectorul de poziţie $\vec{\rho}(\xi, \eta, \zeta)$ al cdg $C(\xi, \eta, \zeta)$ al acestui sistem este

$$\overrightarrow{OC} = \vec{\rho}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} \qquad (1)$$

3. Dacă în formula (1) înlocuim G_i cu $m_i g$, $i = \overline{1,n}$, atunci aceasta devine

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\overrightarrow{OC} = \vec{\rho}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\sum_{1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{1}^{n} m_i} \qquad (1')$$

4. Dacă avem un sistem S de puncte materiale sau de corpuri, alcătuit din p subsisteme de puncte sau corpuri $S_1, S_2, \ldots, S_p$ de greutăţi $G_1, G_2, \ldots, G_p$, respectiv de mase $M_1, \ldots, M_p$, având cdg în punctele $C_1(\vec{\rho}_1), \ldots, C_p(\vec{\rho}_p)$, atunci poziţia cdg $C(\vec{\rho})$ al întregului sistem S este definită de vectorul

$$\overrightarrow{OC} = \vec{\rho}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\sum_{i=1}^{p} G_i \vec{\rho}_i}{\sum_{i=1}^{p} G_i} \qquad (2)$$

5. Dacă luăm $G_i = g M_i$, $i = \overline{1,p}$, atunci (2) devine

$$\overrightarrow{OC} = \vec{\rho}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\sum_{1}^{p} M_i \vec{\rho}_i}{\sum_{1}^{p} M_i}, \qquad (2')$$

unde $M_1 = \sum_{(S_1)} m_i, \ldots, M_p = \sum_{(S_p)} m_i$, iar

$$\vec{\rho}_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \vec{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i}, \ldots\ldots, \vec{\rho}_p(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) = \frac{\sum_{(S_p)} m_i \vec{r}_i}{\sum_{(S_p)} m_i}$$

6. Pentru sistemul S alcătuit din p corpuri omogene (cu densitatea d constantă) pentru care $M_i = V_i \cdot d$, formula (2') se scrie:

$$\overrightarrow{OC} = \vec{\rho}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\sum_{i=1}^{p} V_i \vec{\rho}_i}{\sum_{i=1}^{p} V_i} \qquad (2'')$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde $V_1,\dots,V_p$ sînt volumele celor p corpuri, care alcătuiesc sistemul S.

7. Pentru plăci omogene (de aceeaşi grosime δ, cu densitatea d constantă), pentru care $M_i = A_i \cdot \delta \cdot d$, formula (2') ia forma

$$\overrightarrow{OC} = \vec{\rho}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\sum_{i=1}^{p} A_i \vec{\rho}_i}{\sum_{i=1}^{p} A_i} \qquad (2'')$$

unde $A_1,\dots,A_p$ sînt ariile celor p plăci care alcătuiesc sistemul S.

8. Pentru o bară omogenă, avînd aceeaşi secţiune transversală, alcătuită din mai multe porţiuni de bară de lungimi l_i, $i = \overline{1,p}$, omogene, avînd vectorii de poziţie $\vec{\rho}_i$, $i = \overline{1,p}$, centrul de greutate C are vectorul de poziţie $\vec{\rho}(\xi,\eta,\zeta)$ definit de

$$\overrightarrow{OC} = \vec{\rho}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\sum_{1}^{p} l_i \vec{\rho}_i}{\sum_{1}^{p} l_i} \qquad (3)$$

2.2.1.2. <u>Cazul distribuţiei continue a masei</u>

1. Centrul de greutate $C(\xi,\eta,\zeta)$ al unui corp filiform (al unei linii sau bare) pentru care $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $f,g,h:[a,b] \longrightarrow R$, $f,g,h \in C^1$, iar $\mu : [a,b] \longrightarrow R$, $\mu \in C^0$, are coordonatele ξ,η,ζ date de rapoartele:

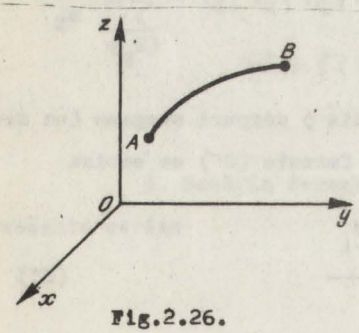


Fig.2.26.

$$\xi = \frac{\int_{\overset{\frown}{AB}} x\,\mu\,ds}{\int_{\overset{\frown}{AB}} \mu\,ds}$$

$$\eta = \frac{\int_{\overset{\frown}{AB}} y\,\mu\,ds}{\int_{\overset{\frown}{AB}} \mu\,ds}$$

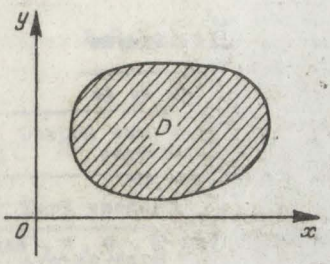
$$\zeta = \frac{\int_{\overset{\frown}{AB}} z\,\mu\,ds}{\int_{\overset{\frown}{AB}} \mu\,ds},$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad \text{iar} \quad \mu ds = dm.$$

2. Centrul de greutate $C(\xi, \eta)$ al unei plăci plane, D, pe care masa e distribuită cu o densitate μ continuă are coordonatele sale ξ, η date de:



$$\xi = \frac{\iint\limits_D x\mu\,dxdy}{\iint\limits_D \mu\,dx\,dy}$$

$$\eta = \frac{\iint\limits_D y\mu\,dxdy}{\iint\limits_D \mu dxdy}$$

unde $\mu\,dxdy = dm$.

Fig.2.27.

3. Centrul de greutate $C(\xi, \eta, \zeta)$ al unei porţiuni de suprafaţă S, de clasă C^1, pe care masa e distribuită cu densitatea μ continuă are coordonatele ξ, η, ζ date de rapoartele:

$$\xi = \frac{\iint\limits_S x\mu\,d\sigma}{\iint\limits_S \mu\,d\sigma}$$

$$\eta = \frac{\iint\limits_S y\mu\,d\sigma}{\iint\limits_S \mu\,d\sigma}$$

$$\zeta = \frac{\iint\limits_S z\mu\,d\sigma}{\iint\limits_S \mu\,d\sigma},$$

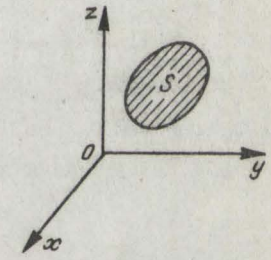


Fig.2.28.

unde $\mu\,d\sigma = dm$, iar $d\sigma$ este elementul de arie pe S.

4. Centrul de greutate $C(\xi, \eta, \zeta)$ al unui corp care ocupă domeniul V din $\mathbb{R}^3$, care are masa distribuită cu densitatea μ continuă în V, are coordonatele ξ, η, ζ definite de rapoartele:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

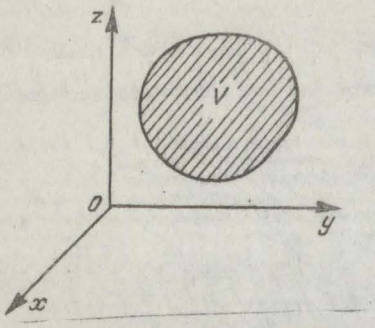


Fig.2.29.

$$\xi = \frac{\iiint x\,\mu\,dxdydz}{\iiint \mu\,dx\,dy\,dz}$$

$$\eta = \frac{\iiint y\,\mu\,dxdydz}{\iiint \mu\,dxdydz}$$

$$\zeta = \frac{\iiint z\,\mu\,dxdydz}{\iiint \mu\,dx\,dy\,dz}$$

cu $\mu\,dxdydz = dm$.

5. In toate formulele precedente pentru ξ, η, ζ, densitatea μ se simplifică, dacă μ = constant.

6. Dacă un sistem de puncte materiale sau un corp omogen are o axă de simetrie, un plan de simetrie sau un centru de simetrie, atunci cdg al său se află pe axa de simetrie, în planul de simetrie sau coincide cu centrul de simetrie.

2.2.1.3. Teoremele lui Guldin - Pappus

1. Aria A a suprafeţei generate printr-o rotaţie completă a unui arc de curbă plană simplă $\overset{\frown}{MN}$, în jurul axei Ox din planul curbei şi pe care axa Ox nu îl traversează, este egală cu lungimea l a curbei înmulţită cu lungimea cercului descris de cdg al curbei, i.e.

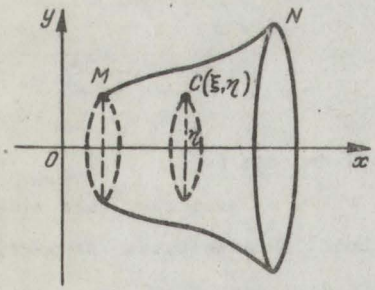


Fig.2.30.

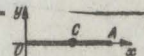
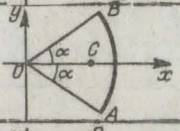
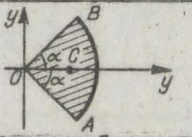
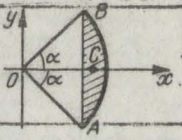
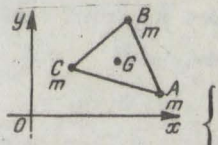
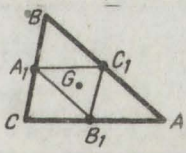
$$A = 2\pi\eta l$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

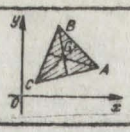
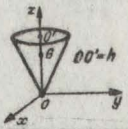
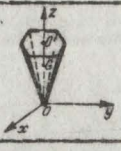
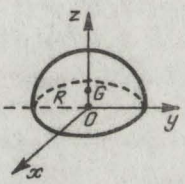
2. Volumul V al corpului generat printr-o rotaţie completă a unei suprafeţe plane simple în jurul unei axe Ox, din planul ei şi pe care axa Ox nu o traversează, este egală cu aria A a suprafeţei înmulţită cu lungimea cercului descris de cdg al suprafeţei, i.e.:

$$V = 2\pi\eta A.$$

2.2.1.4. Cîteva cdg ale unor corpuri uzuale

Nr. crt.	Corpul sau sistemul de corpuri	Figura	Poziţia centrului de greutate
1.	Bară omogenă de lungime ℓ		$C(\xi, 0), \xi = \frac{\ell}{2}, \eta = 0$
2.	Arc de cerc omogen, cu semideschiderea α		$C(\xi, 0)$, unde $\xi = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $\eta = 0$
3.	Placă omogenă în formă de sector de cerc cu semideschiderea α		$C(\xi, 0)$ unde $\xi = \frac{2R}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $\eta = 0$
4.	Placă omogenă în formă de segment de cerc cu semideschiderea α		$C(\xi, 0), \xi = \frac{2R}{3}\cdot\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$
5.	Trei puncte materiale de mase egale m aşezate în vîrfurile $\triangle ABC$		$G(\xi, \eta)$ coincide cu punctul de intersecţie a medianelor $\triangle ABC$ $\begin{cases} 3\xi = x_A + x_B + x_C \\ 3\eta = y_A + y_B + y_C \end{cases}$
6.	Trei bare omogene, de aceeaşi grosime care alcătuiesc perimetrul $\triangle ABC$		$G(\xi, \eta)$ coincide cu centrul cercului înscris în triunghiul median $A_1B_1C_1$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

7. Placă omogenă în formă de triunghi ABC, de aceeaşi grosime		$G(\xi, \eta)$ coincide cu punctul de intersecţie a medianelor $\triangle ABC$
8. Corp conic de înălţime h		$G(0,0,\zeta)$ are coordonatele $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \frac{3h}{4}$
9. Corp în formă de piramidă regulată de înălţime h		$G(0,0,\zeta)$ are coordonatele $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \frac{3h}{4}$
10. Corp emisferic de rază R şi suprafaţă emisferică de raza R		$G(0,0,\zeta)$ are coordonatele $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \frac{3}{8}R$
		$G(,0,0,\ )$ are coordonatele $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \frac{R}{2}$

§.2.2.2 Probleme

2.2.2.1. Centre de greutate ale unor corpuri filiforme

72. 1) Trei bare omogene AB, BC şi CA, de aceeaşi secţiune, confecţionate din acelaşi material formează un triunghi ABC. Determinaţi cdg al acestui sistem de bare.

2) Fie $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ şi $C(x_C, y_C)$ trei puncte materiale de mase m şi $G(x_G, y_G)$ centrul lor de greutate.

Dacă punctului G îi asociem o masă egală cu 3 m şi dacă notăm cu G_1 centrul de greutate al sistemului de puncte B,C,G, cu G_2 centrul de greutate al sistemului de puncte C,A,G şi cu G_3 centrul de greutate al tripletului de puncte A,B,G atunci sistemul format din punctele G_1, G_2 şi G_3, de mase 5m, are şi el pe G drept centru de greutate.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Fie $A_1,\dots,A_n$ n puncte din $\mathbb{R}^2$ în care presupunem că se găsesc n puncte materiale de mase egale cu m.

Să mai presupunem că originea O a reperului este astfel aleasă încît ea coincide cu centrul de greutate al sistemului de puncte considerat.

Să se demonstreze că mulţimea punctelor $M \in \mathbb{R}^2$ pentru care $\sum_{k=1}^{n} \overline{MA}_k^2 = A > A_0 = \sum_{1}^{n} \overrightarrow{OA}_k^2$ e un cerc de centru O şi de rază $R = \sqrt{\frac{A-A_0}{n}}$.

73. 1) Să se afle cdg al unui arc de astroidă $\overset{\frown}{AB}$, care are un capăt în punctul A(a,0) şi altul în B(0,a), iar densitatea arcului este $\mu(x,y) = kx$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, unde $k \in \mathbb{R}_+^*$ e o constantă fixică dată.

2) Să se determine cdg al unei bucle omogene de cicloidă $\overset{\frown}{OA}$ (de ecuaţii $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$).

3) Să se calculeze cdg al arcului de cardioidă $\overset{\frown}{OA}$ din semiplanul $y \geq 0$ (de ecuaţie polară $\rho = a(1+\cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$)

4) Fie arcul de cerc $\overset{\frown}{ACB}$ din figură, cu $\alpha = 45°$. Se admite că densitatea lui $\mu(x,y)$ variază după legea

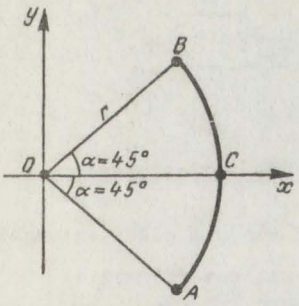


Fig.2.31.

$$\mu(x,y) = k(x-a),\ a \leq x \leq r$$

Să se afle cdg al acestui arc de cerc.

74. 1) Determinaţi cdg al unui fir omogen $\overset{\frown}{OA}$, ale cărui ecuaţii parametrice sînt

$$x = t,\ y = \frac{4}{5} \cdot t^{3/2},\ z = t^2,\ 0 \leq t \leq 1$$

(Punctul O corespunde lui t = 0, iar A lui t = 1).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Determinați cdg al unei spire omogene de elice circulară $\overset{\frown}{AB}$, de ecuații $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ($a,b \in \mathbb{R}_+^*$, punctul A corespunde lui $t = 0$, iar B lui $t = 2\pi$).

3) Determinați cdg al primei jumătăți de spiră $\overset{\frown}{OA}$ a unei elice circulare omogene, de ecuații $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq \pi$.

75. 1) Determinați cdg al arcului de curbă omogen de ecuații $x = e^t \cdot \cos t$, $y = e^t \cdot \sin t$, $z = e^t$, $-\infty < t \leq 0$.

2) Să se afle cdg al acroulul de elice de ecuații $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq \pi$, cînd $\mu(x,y,z) = kz$, k fiind o constantă dată.

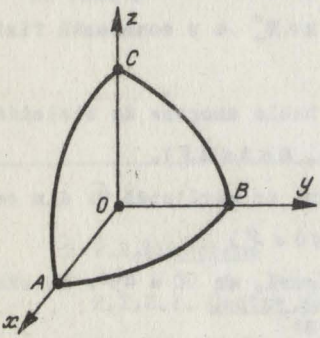


Fig.2.32.

3) Determinați cdg al conturului triunghiului sferic ABC, aparținînd sferei de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și fiind situat în primul octant în care $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

76. Să se demonstreze că abscisa și ordonata cdg al unui arc de curbă omogen AB, de clasă C^1, de ecuație $\rho = f(\varphi)$, $f:[\varphi_1, \varphi_2] \longrightarrow \mathbb{R}$, sînt date de formulele:

$$\xi = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}; \qquad \eta = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}$$

2.2.2.2. Centre de greutate ale unor plăci plane

77. 1) Fie G centrul de greutate al unei plăci triunghiulare omogene ABC și M un punct din planul acesteia. Demonstrați că

$$2(\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}) = 9\,\overrightarrow{MG}^2 - \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 \qquad (1)$$

2) Fie $A_1A_2A_3$ o placă triunghiulară omogenă și G centrul ei de greutate. Dacă $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ și $\vec{\rho}$ sînt vectorii de poziție ai vîrfurilor și al lui G, atunci avem $3\vec{\rho} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$ (vedeți figura 2.46.)

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Fie două plăci triunghiulare omogene $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ situate oricum în spațiu, având cdg G_1 și G_2.

Demonstrați că

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\,\overrightarrow{G_1G_2}$$

78. Să se afle cdg ale plăcilor omogene de aceeași grosime, având formulele indicate mai jos.

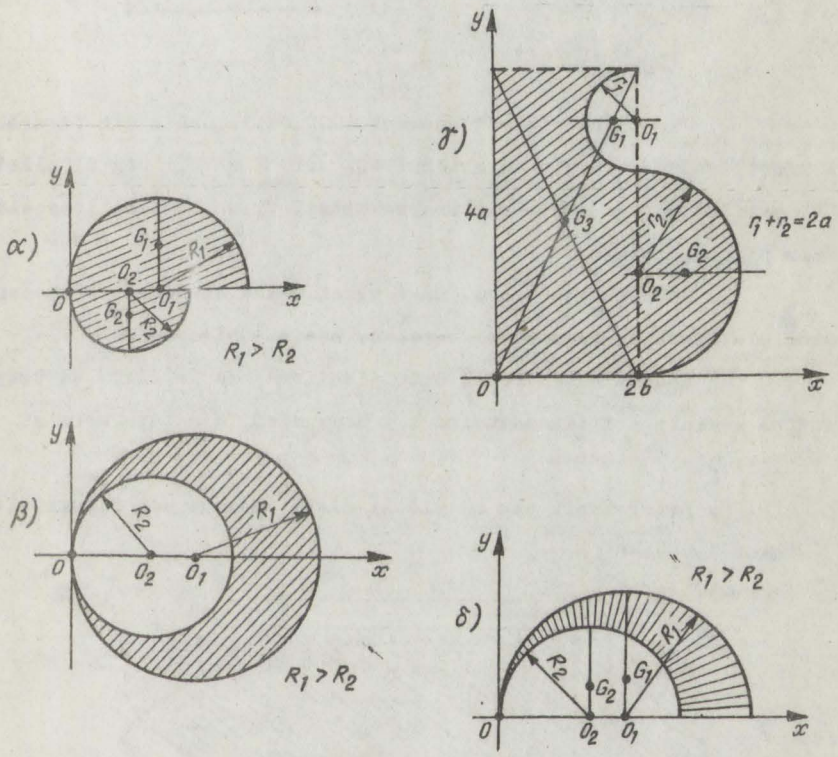


Fig.2.33.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

79. 1) Dintr-un disc circular din lemn de 18 cm rază se scoate o porţiune circulară de 9 cm rază, tangentă interior discului dat. Determinaţi cdg al porţiunii din disc rămase. (Admitere Şcoala Politehnică Bucureşti).

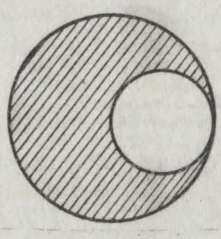


Fig.2.34.

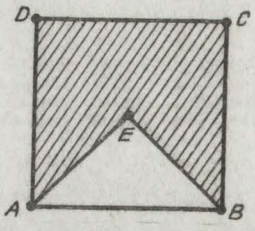


Fig.2.35.

2) Fie placa pătrată omogenă ABCD de latură a din figură. Determinaţi un punct E din interiorul ei, a.î. E să fie cdg al plăcii AEBCD, care se obţine după înlăturarea plăcii triunghiulare isoscele ABE din placa iniţială.

3) Determinaţi cdg al unei plăci plane omogene, de aceeaşi grosime, în formă de segment de cerc, cu semideschiderea α .

4) Determinaţi cdg al unei plăci omogene în formă de trapez ştiind că aceasta are dimensiunile b = baza mică, B = baza mare şi h = înălţimea.

5) Determinaţi cdg al plăcii plane omogene din figura alăturată. (Examen 1986).

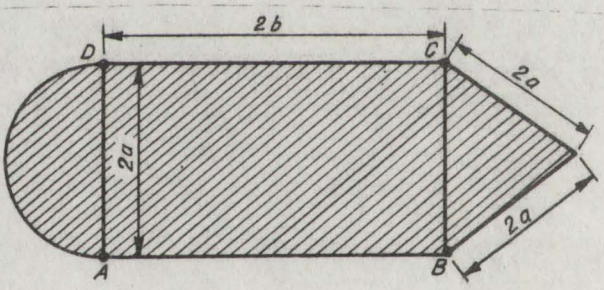


Fig.2.36.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

8e. Să se afle cdg ale plăcilor plane omogene mărginite de graficele curbelor de mai jos:

1) $xy = 1$; $x + 4y - 5 = 0$, $x > 0$, $y > 0$ (N.Cierănescu)

2) $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $2Ry = R^2 - x^2$

3) $y = \sqrt{2ax}$, $2ay = x^2$, $a \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ (N.Cierănescu)

4) $ay = x^2$, $y = 2a - x$, $a > 0$

5) $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2x$, $x \geq 0$. (N.Cierănescu)

6) $y = 2 - \operatorname{ch} x$, $y \geq 0$, $x \in \left[\ln(2-\sqrt{3}), \ln(2+\sqrt{3})\right]$

81. Să se afle cdg al plăcilor plane omogene, mărginite de

1) o cicloidă de ecuații $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$, și de axa Ox.

2) o buclă de sinusoidă de ecuație $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ și de axa Ox.

3) bucla din dreapta a unei lemniscate Berneulli de ecuație $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$, $a > 0$.

4) ramura de astroidă de ecuație $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, pentru care $x \geq 0$ și $y \geq 0$.

82. 1) Să se determine cdg al unei plăci plane omogene mărginite de elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ și de axele de coordonate din cadranul întîi.

2) Să se determine cdg al unei plăci omogene limitate de cardioida $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

3) Fie o placă plană $OABC$, dreptunghiulară, a cărei densitate variază după legea: $\mu(x,y) = k(x^2 + y^2)$, $\mu(\cdot,\cdot): [0,a] \times [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Se cere cdg al plăcii.

4) Să se demonstreze că abscisa și ordonata cdg al unei plăci plane omogene mărginite de două raze vectoare care fac cu Ox unghiurile φ_1 și φ_2 și de curba de ecuație polară $\rho = f(\varphi)$, $f: [\varphi_1, \varphi_2] \longrightarrow \mathbb{R}$, sînt date de formulele:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\xi = \frac{2}{3}\,\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3\cos\varphi\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi}\,,\qquad \eta = \frac{2}{3}\,\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3\sin\varphi\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi}$$

2.2.2.3. Centre de greutate ale unor suprafeţe

83. 1) Să se afle cdg al porţiunii din suprafaţa omogenă de ecuaţie $x = \frac{y^2+z^2}{1e}$, tăiată de planul $x = 1e$.

2) Să se afle cdg al unei emisfere omogene S de ecuaţie $z(x,y) = \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$.

3) Să se afle cdg al suprafeţei conice omogene de ecuaţie $a^2z^2 = b^2(x^2+y^2)$, $0 \le z \le b$.

4) Să se afle cdg al unei suprafeţe emisferice S de ecuaţie $z(x,y) = \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$, pentru care $\mu(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$, $k>0$ fiind o constantă fizică dată.

2.2.2.4. Centre de greutate ale unor corpuri

84. 1) Fie $A_1A_2A_3A_4$ un corp tetraedric ale cărui vîrfuri au vectorii de poziţie $\vec{r}_i$ $(i = \overline{1,4})$ şi G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale feţelor $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ şi $A_1A_2A_3$, cu vectorii de poziţie $\vec{\varrho}_i$, $i = \overline{1,4}$.

Demonstraţi că $\sum_{i=1}^{4}\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{4}\vec{\varrho}_i$.

2) Să se determine poziţia cdg al unui corp omogen în formă de piramidă triunghiulară, avînd înălţimea h.

3) Să se afle poziţia cdg al unui corp omogen în formă de trunchi de piramidă cu ariile bazelor a şi b şi înălţimea h.

85. 1) Să se afle cdg al unui corp conic omogen, cu raza bazei R şi înălţimea h.

2) Să se afle cdg al unui corp emisferic omogen, de rază R.

3) Să se afle cdg al porţiunii din elipsoidul omogen, de ecuaţie:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \leqslant 1,$$

situate în primul octant, î.e. pentru care $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ şi $z \geqslant 0$.

4) Să se afle cdg al solidului omogen limitat de planul $z = h$ şi de paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, $p > 0$, $q > 0$.

86. 1) Fie G centrul de greutate al unui corp tetraedric omogen $A_1A_2A_3A_4$. Atunci avem

$$\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

2) Un corp omogen este alcătuit dintr-un cilindru de rază r şi înălţimea h şi un corp emisferic de rază r, lipit de o bază a cilindrului. Corpul e aşezat cu emisfera pe un plan orizontal şi axa cilindrului verticală. In mod intuitiv, putem afirma că, dacă $r \gg h$, poziţia precedentă va fi o poziţie de echilibru stabil, iar dacă $r \ll h$ poziţia precedentă va fi o poziţie de echilibru instabil a corpului respectiv.

Se cere raportul $\frac{r}{h}$ pentru care poziţia precedentă e o poziţie de echilibru stabil, oricare ar fi punctul în care se sprijină emisfera pe planul orizontal.

87. 1) Un corp omogen e alcătuit dintr-un corp emisferic şi dintr-un con circular drept având raza r, egală cu raza emisferei. Ştiind că centrul de greutate al acestui corp se găseşte în O, se cere înălţimea h a conului.

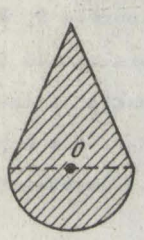


Fig.2.37.

2) Să se afle cdg al corpului omogen mărginit de paraboloidul de rotaţie $(x^2 + y^2)c = 2a^2z$ şi de suprafaţa conică $a^2z^2 = c^2(x^2+y^2)$.

3) Să se afle cdg al corpului emisferic, mărginit de suprafaţa sferei $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ şi de planul $z = 0$, ştiind că $\mu(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $0 \leqslant x,y,z \leqslant R$, $k \in R_+^*$.

4) Să se determine cdg al corpului omogen mărginit de suprafaţa $z = \frac{x^2+y^2}{a}$, de planul $x+y = b$ şi de planele $x = 0$, $y = 0$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

5) Să se afle cdg al corpului omogen mărginit de planul $z = 0$, de suprafeţele cilindrice $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = r^2$ şi de planul $hy + 2Rz = hR$, $R > r$.

2.2.2.5. Teoremele Guldin - Pappus

88. 1) Folosind teoremele Guldin - Pappus, determinaţi coordonatele cdg al unui semicerc omogen şi al unei plăci omogene în formă de semidisc.

2) Un hexagon regulat cu latura R se roteşte în jurul unei laturi, generînd un corp. Determinaţi volumul acestui corp.

3) Să se determine cu ajutorul teoremelor Guldin-Pappus aria solidului generat prin rotaţia buclei de cicloidă de ecuaţie $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, în jurul axei Ox.

2.2.3. Rezolvarea problemelor

72. 1) Fie triunghiul ABC format cu barele omogene respective şi D, E, F centrele de greutate ale acestor bare, coincizînd cu mijloacele laturilor corespunzătoare. Astfel am ajuns la compunerea a 3 forţe concentrate în 3 puncte discrete D, E şi F.

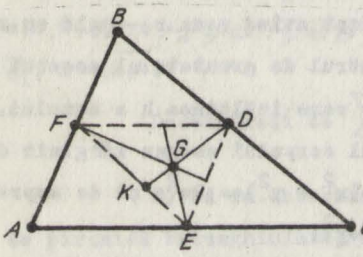


Fig.2.38.

Să compunem forţele paralele de intensităţi proporţionale cu lungimile laturilor AB şi AC, aplicate în F şi E. Fie K punctul de aplicaţie al rezultantei acestor forţe. Atunci avem:

$$KE \cdot AC = KF \cdot AB \qquad \text{sau}$$

$$\frac{KE}{KF} = \frac{AB}{AC} = \frac{2DE}{2DF} = \frac{DE}{DF}$$

Această egalitate ne arată că punctul K aparţine bisectoarei unghiului EDF. Acum trebuie să compunem această rezultantă parţială aplicată în K cu forţa corespunzătoare barei BC, aplicată în D. Evident cdg se va găsi pe bisectoarea DK. Din motive de simetrie cdg se va găsi şi pe celelalte bisectoare interioare ale $\triangle DEF$, anume pe FG şi EG. Astfel

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

putem spune că cdg al perimetrului $\triangle ABC$ se află în centrul cercului înscris în triunghiul median DEF.

2) Punctele materiale A, B, C au, conform enunțului, masele egale cu m. Atunci centrul de greutate al acestor trei puncte materiale este punctul $G(x_G, y_G)$, iar x_G și y_G se obțin prin proiectarea relației (2') pe axele Ox și Oy ale unui reper cartezian ortogonal:

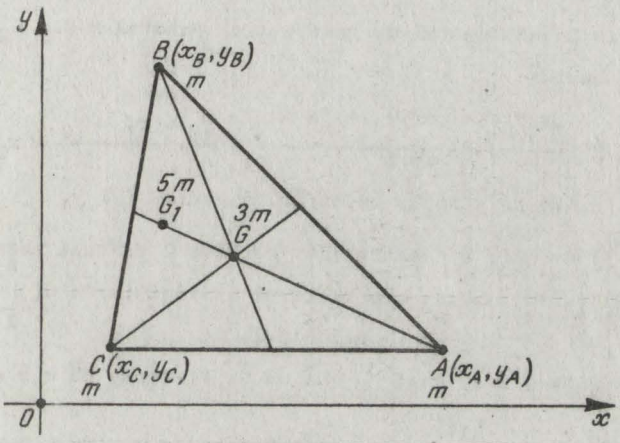


Fig.2.39.

$$x_G = \frac{mx_A + mx_B + mx_C}{3m} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Fie $G_1(x_{G1}, y_{G1})$ cdg al punctelor materiale B și C de mase m și G de masă 3m (vedeți figura 2.39.). Coordonatele lui se deduc în mod asemănător

$$\begin{cases} x_{G1} = \dfrac{mx_C + 3m \cdot x_G + mx_B}{5m} = \dfrac{x_A + 2x_B + 2x_C}{5} \\ y_{G1} = \dfrac{y_A + 2y_B + 2y_C}{5} \end{cases}$$

Cda. 236/987 Fasc. 8

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Acum coordonatele punctelor analoage G_2 și G_3 se obțin din precedentele prin permutări circulare:

$$\begin{cases} x_{G_2} = \dfrac{2x_A + x_B + 2x_C}{5} \\ y_{G_2} = \dfrac{2y_A + y_B + 2y_C}{5} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_{G_3} = \dfrac{2x_A + 2x_B + x_C}{5} \\ y_{G_3} = \dfrac{2y_A + 2y_B + y_C}{5} \end{cases}$$

In final centrul de greutate al punctelor G_1, G_2, G_3 de mase $5m$ va avea abscisa

$$\xi = \frac{5m \cdot x_{G1} + 5m\, x_{G_2} + 5m\, x_{G_3}}{15\, m} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_G$$

Analog se găsește ordonata acestuia $\eta = y_G$

3) Se știe că centrul de greutate G al unui asemenea sistem de n puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are vectorul de poziție $\overrightarrow{OG} = \left(\sum_1^n \overrightarrow{OA_k}\right) \Big/ n$

In cazul de față $G \equiv O$, deci $\sum_1^n \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}$. Fie acum $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Avem succesiv

$$\overrightarrow{MA_k} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{MA_k}^2 = \overrightarrow{OM}^2 - 2\,\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_k}^2$$

Dacă sumăm de la 1 la n, găsim:

$$\sum_1^n \overrightarrow{MA_k}^2 = nr^2 - 2\,\overrightarrow{OM} \sum_1^n \overrightarrow{OA_k} + \sum \overrightarrow{OA_k}^2$$

Deci $nr^2 = A - \sum_1^n \overrightarrow{OA_k}^2$ sau $x^2 + y^2 = \dfrac{A - A_o}{n}$

Urmînd calculele în ordine inversă avem și preprietatea reciprocă.

Astfel, în adevăr, locul geometric cerut este cercul de centru O și rază $R = \sqrt{\frac{A - A_o}{n}}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

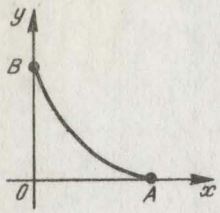


Fig.2.40.

73. 1) Evident $\xi = \dfrac{\int_{\widehat{AB}} x\mu\,ds}{\int_{\widehat{AB}} \mu\,ds}$; dacă avem în vedere că $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ şi că $ds = 3a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$, obţinem:

$$\xi = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3\theta\, k.a\cos^3\theta .3a\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} k.a\cos^3\theta\, 3a\sin\theta\cos\theta\,d\theta} = \frac{5a}{8}$$

Analog găsim $\eta = \dfrac{15\,a\pi}{256}$

2) Un calcul analog ne dă

$$\xi = a\pi$$

$$\eta = \frac{5a}{6}$$

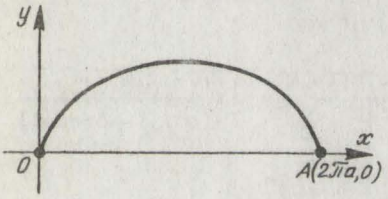


Fig.2.41.

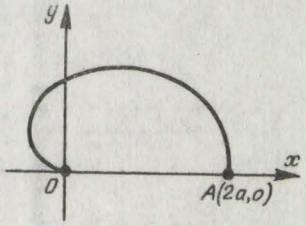


Fig.2.42.

3) Ecuaţiile parametrice ale curbei sînt

$$x = a(1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$y = a(1+\cos\theta)\sin\theta,\quad 0 \le \theta \le \pi$$

Vom avea $\xi = \dfrac{\int_{\widehat{OA}} x\,ds}{\int_{\widehat{OA}} ds} = \dfrac{\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\cos\theta .2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta} =$

$= \dfrac{\frac{16a^2}{5}}{4a} = \dfrac{4a}{5}$. Asemănător găsim

$$\eta = \frac{\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta .2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{4a} = \frac{\frac{16a^2}{5}}{4a} = \frac{4a}{5}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

4) Alegem axele din figură. Evident $\eta = 0$; rămîne să aflăm

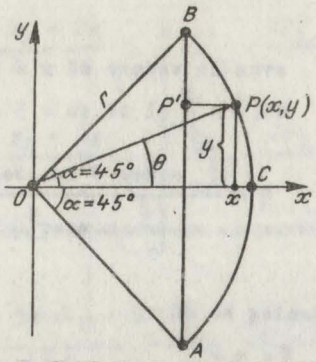


Fig.2.43.

pe ξ; pentru generalitate nu luăm $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ci α un unghi oarecare din compactul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; avem

$$\xi = \frac{\int_{\overset{\frown}{ACB}} x\mu(x,y)ds}{\int_{\overset{\frown}{ACB}} \mu(x,y)ds} = \frac{\int_{\overset{\frown}{ACB}} xk(x-a)ds}{\int_{\overset{\frown}{ACB}} k(x-a)ds} =$$

$$= \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\theta \cdot k(r\cdot\cos\theta - a)rd\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} k(r\cos\theta - a)rd\theta} = r \cdot \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}$$

Cazuri particulare: $\alpha = 0 \Longrightarrow \xi = r$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \xi = \frac{r(\pi-2)\sqrt{2}}{2(4-\pi)}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \xi = \frac{\pi r}{4}$$

74. 1) Avem $\xi = \frac{\int_{\overset{\frown}{OA}} x\,ds}{\int_{\overset{\frown}{OA}} ds}$ și analogegole, unde

$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt = (1+2t)dt$; găsim $\xi = \frac{\int_0^1 t(1+2t)dt}{\int_0^1 (1+2t)dt} = \frac{7/6}{2} = \frac{7}{12}$;

$\eta = \frac{68}{105}$, $\zeta = \frac{5}{12}$

2) Avem evident $\xi = \eta = 0$ și $\zeta = \frac{\int_{\overset{\frown}{AB}} zds}{\int_{\overset{\frown}{AB}} ds}$, unde

$ds = \sqrt{a^2+b^2}dt$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Găsim $\zeta = \dfrac{\int_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt} = b\pi$

3) Calculul analog: $\xi = 0$, $\eta = \frac{2a}{\pi}$, $\zeta = \frac{b\pi}{2}$

75. 1) Calcul analog: $ds = \sqrt{3}\,e^t\,dt$ etc. $\xi = \frac{2}{5}$, $\eta = -\frac{1}{5}$, $\zeta = \frac{1}{2}$.

2) Avem, de pildă, $\xi = \dfrac{\int_{\widehat{AB}} x\mu\,ds}{\int_{\widehat{AB}} \mu\,ds}$; $ds^2 = dx^2 + dy^2 + ds^2 =$

$= (a^2+b^2)dt^2$; $ds = \sqrt{a^2+b^2}\,dt$; $\int_{\widehat{AB}} \mu ds = bk\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\pi^2}{2}$;

$\int_{\widehat{AB}} x\mu\,ds = \int_0^{\pi} a\cos t \cdot kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt = -2abk\sqrt{a^2+b^2}$.

Deci $\xi = -\frac{4a}{\pi^2}$. Analog găsim $\eta = \frac{2a}{\pi}$ și $\zeta = \frac{2b\pi}{3}$

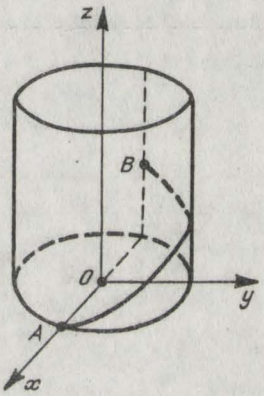


Fig.2.44.

3) Să aflăm coordonatele lui G_1, centrul de greutate al arcului $\widehat{AB}$. Se observă că G_1 e centrul de greutate al unui sfert de cerc mare de pe sferă, omogen de rază a.

Deci $OG_1 = R\,\frac{\sin \pi/4}{\pi/4} = \frac{4a}{\pi\sqrt{2}}$. Atunci G_1 va avea coordonatele

$\xi_1 = OG_1 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{2a}{\pi}$; $\eta = OG_1 \sin\frac{\pi}{4} = \frac{2a}{\pi}$; $\zeta_1 = 0$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

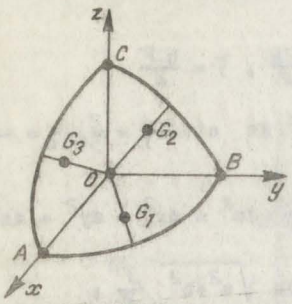


Fig.2.45.

Analog găsim pentru G_2: $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \frac{2a}{\pi}$ și pentru G_3: $\xi_3 = \frac{2a}{\pi}$, $\eta_3 = 0$, $\eta_3 = \frac{2a}{\pi}$

Acum în punctele G_1, G_2, G_3 considerăm că avem aplicate trei forțe paralele de intensități proporționale cu $\frac{L}{4}$, unde $L = 2\pi a$, și problema s-a redus la calculareа centrului lor de greutate. Acesta va avea coordonatele:

$$\xi = \eta = \zeta = \frac{\frac{L}{4}\cdot\frac{2a}{\pi} + \frac{L}{4}\cdot\frac{2a}{\pi}}{3\cdot\frac{L}{4}} = \frac{4a}{3\pi}$$

76. Trecem de la coordonatele cartezience x și y la coordonatele polare ρ și φ în formulele pentru ξ și η de la pag.128 punctul 1, adică în $\xi = \frac{\int_{\widehat{AB}} x\,ds}{\int_{\widehat{AB}} ds}$ și $\eta = \frac{\int_{\widehat{AB}} y\,ds}{\int_{\widehat{AB}} ds}$

77. 1) Scriem $\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{AG}$, $\vec{MG} = \vec{MB} + \vec{BG}$, $\vec{MG} = \vec{MC} + \vec{CG}$. Adunăm și găsim $3\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$, deoarece $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$.

De aici prin ridicare la pătrat deducem $9\vec{MG}^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 + 2(\vec{MA}\cdot\vec{MB} + \vec{MB}\cdot\vec{MC} + \vec{MC}\cdot\vec{MA})$, care este identitatea (1) în altă scriere.

2) Avem evident:

$$\vec{r}_1 = \vec{\rho} + \vec{GA}_1$$
$$\vec{r}_2 = \vec{\rho} + \vec{GA}_2$$
$$\vec{r}_3 = \vec{\rho} + \vec{GA}_3$$

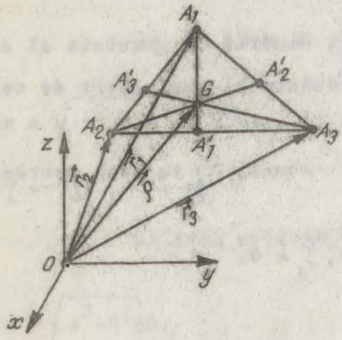


Fig.2.46.

Dar $\vec{GA}_1 + \vec{GA}_2 = 2\vec{GA}_3 = -\vec{GA}_3$.

Acum prin adunare găsim relația cerută $\vec{\rho} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$.

3) Scriem succesiv

$$\vec{A_1A_2} = \vec{A_1G_1} + \vec{G_1G_2} + \vec{G_2A_2}$$
$$\vec{B_1B_2} = \vec{B_1G_1} + \vec{G_1G_2} + \vec{G_2B_2}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_1G_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2C_2};$$

adunăm aceste relaţii şi, ţinînd în vedere că

$$\overrightarrow{A_1G_1} + \overrightarrow{B_1G_1} + \overrightarrow{C_1G_1} = \vec{0} \text{ şi că } \overrightarrow{G_2A_2} + \overrightarrow{G_2B_2} + \overrightarrow{G_2C_2} = \vec{0},$$

rezultă egalitatea cerută.

78. α) Vom considera că placa dată e alcătuită din două plăci: una în formă de semidisc de rază R_1 şi alta tot în formă de semidisc dar de rază $R_2 < R_1$ (vedeţi figura 2.33.α)).

Prima are centrul de greutate în $G_1(R_1, \frac{4R_1}{3\pi})$ şi aria $A_1 = \frac{\pi R_1^2}{2}$, iar a doua în $G_2(R_2, -\frac{4R_2}{3\pi})$ şi aria $A_2 = \frac{\pi R_2^2}{2}$

Acum G, centrul de greutate, va avea coordonatele ξ şi η definite de:

$$\xi = \frac{R_1A_1 + R_2A_2}{A_1+A_2}, \quad \eta = \frac{\frac{4R_1}{3\pi} \cdot A_1 - \frac{4R_2}{3\pi} A_2}{A_1 + A_2}$$

respectiv

$$\xi = \frac{R_1^3 + R_2^3}{R_1^2 + R_2^2}, \quad \eta = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 + R_2^2}$$

β) Vom considera că placa noastră e formată din două plăci în formă de discuri, una cu centrul de greutate în $G_1(R_1,0)$ în care e aplicată e forţă $\vec{F}_1$ proporţională cu aria $A_1 = \pi R_1^2$ şi alta cu centrul de greutate în $G_2(R_2,0)$ în care e aplicată e forţă $\vec{F}_2$ opusă lui $\vec{F}_1$, de intensitate proporţională cu aria $A_2 = \pi R_2^2$. Acum G, centrul de greutate al plăcii, va avea coordonatele:

$$\xi = \frac{R_1A_1 + R_2A_2}{A_1+A_2}, \eta = 0 \quad \text{sau}$$

$$\xi = \frac{\pi(R_1^3 - R_2^3)}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} = \frac{R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2}{R_1 + R_2}, \quad \eta = 0.$$

γ) Vom considera că placa dată e alcătuită din alte 3 plăci:

1) una în formă de semidisc cu centrul de greutate în punctul $G_1(2b - \frac{4r_1}{3\pi}, r_1 + 2r_2)$ în care e aplicată e forţă $\vec{F}_1$ de un anumit sens, proporţională cu aria $A_1 = \frac{\pi r_1^2}{2}$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) alta tot în formă de semidisc cu centrul de greutate în punctul $G_2(2b + \frac{4r_2}{3\pi}, r_2)$ în care e aplicată o forță $\vec{F}_2$, de sens opus lui $\vec{F}_1$, de mărime proporțională cu aria $A_2 = \frac{\pi r_2^2}{2}$ și

3) a treia în formă de dreptunghi cu centrul de greutate în $G_3(b, 2a)$ în care e aplicată o forță $\vec{F}_3$, de sens opus lui $\vec{F}_1$; de mărime proporțională cu aria $A_3 = 8\,ab$.

Acum centrul de greutate $G(\xi, \eta)$ va avea coordonatele

$$\xi = \frac{(2b - \frac{4r_1}{3\pi})(-\frac{\pi r_1^2}{2}) + (2b + \frac{4r_2}{3\pi})\frac{\pi r_2^2}{2} + b \cdot 8ab}{-\frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} + 8\,ab}$$

$$\eta = \frac{(r_1 + 2r_2)(-\frac{\pi r_1^2}{2}) + r_2 \cdot \frac{\pi r_2^2}{2} + 2a \cdot 8\,ab}{-\frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} + 8\,ab} \quad \text{etc.}$$

5) Procedeu analog: $G_1(R_1, \frac{4R_1}{3\pi})$, $A_1 = \frac{\pi R_1^2}{2}$; $G_2(R_2, \frac{4R_2}{3\pi})$ și $A_2 = \frac{\pi R_2^2}{2}$. Acum cdg G al plăcii date va avea coordonatele:

$$\xi = \frac{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}{R_1 + R_2} \; ; \quad \eta = \frac{4}{3\pi}\xi$$

79. 1) Discul mare are cdg în $O(0,0)$ și în el considerăm aplicată o forță $\vec{F}_1$, de mărimea proporțională cu aria $A_1 = \pi R^2$. Discul mic are cdg în $O'(\frac{R}{2}, 0)$ și în O' considerăm aplicată o forță $\vec{F}_2$ paralelă cu $\vec{F}_1$ și de sens contrar, de mărime proporțională cu aria $A_2 = \frac{\pi R^2}{4}$. Acum centrul de greutate al plăcii haşurate va avea coordonatele:

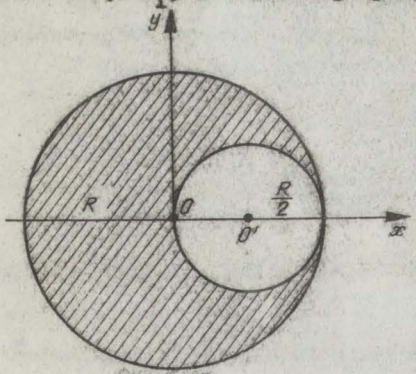


Fig.2.47.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\xi = \frac{0 \cdot A_1 - \frac{R}{2} A_2}{A_1 - A_2} \quad \text{și} \quad \eta = \frac{0 \cdot A_1 - 0 \cdot A_2}{A_1 - A_2}.$$

Deci $\xi = -\frac{R}{6} = -3$ cm, $\eta = 0$.

Evident, $\eta = 0$ rezultă și din simetria figurii al cărui cdg se cere.

2) Placa ABCD are cdg în $C_1(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ și aria $A_1 = a^2$. Placa triunghiulară ABE are cdg în $C_2(\frac{a}{2}, \frac{h}{3})$ și aria (afectată de semnul minus): $A_2 = -\frac{ah}{2}$. Placa ABECD va avea cdg în $E(\frac{a}{2}, h)$, iar ordonata lui va fi

$$h = \frac{\frac{a}{2} \cdot A_1 - \frac{h}{3} \cdot A_2}{A_1 - A_2}.$$

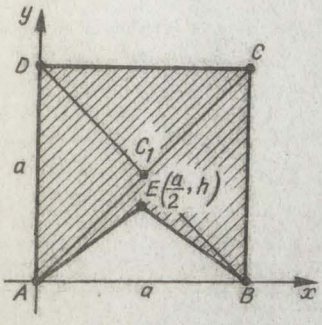


Fig.2.48.

De aici rezultă ecuația în h: $2h^2 - 6ah + 3a^2 = 0$, cu rădăcina acceptabilă $h = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \cdot a \simeq$ $\simeq 0{,}635\ a$. Deci E are coordonatele $x = \frac{a}{2}$, $y = h \simeq 0{,}635\ a$.

3) Placa are o axă de simetrie Ox; deci cdg are coordonatele $\xi \neq 0$ și $\eta = 0$.

Putem considera placa dată ca fiind alcătuită dintr-o placă în formă de sector de cerc, cu centrul de greutate în G_1 pentru care $\xi_1 = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ și $\eta_1 = 0$, de arie $A_1 = R^2\alpha$, din care s-a scos placa triunghiulară OAC, cu centrul de greutate în G_2 pentru care $\xi_2 = \frac{2}{3} R \cos\alpha$ și $\eta_2 = 0$, de arie $A_2 = \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2}$. De aceea putem scrie că centrul de greutate al segmentului are coordonatele:

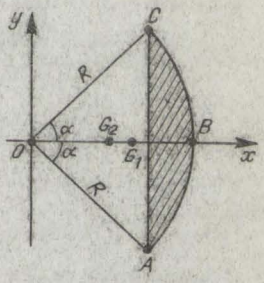


Fig.2.49.

$$\xi = \frac{\xi_1 A_1 - \xi_2 A_2}{A_1 - A_2} \quad \text{și} \quad \eta = 0.$$

Făcînd calculele în detaliu obținem:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\xi = \frac{\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot R^2\alpha - \frac{2R}{3}\cos\alpha\cdot R\sin\alpha\cos\alpha}{R^2\alpha - R^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2}{3}R\sin\alpha\frac{1-\cos^2\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2R}{3}\cdot\frac{\sin^3\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}.$$

4) Placa în formă de trapez poate fi considerată că alcătuită din două plăci triunghiulare

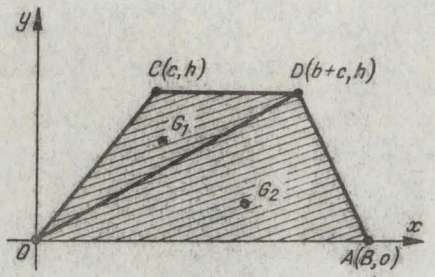


Fig.2.5e.

ΘDC şi ΘAD cu cdg în $G_1(\frac{b+2c}{3}, \frac{2h}{3})$ şi în $G_2(\frac{b+B+c}{3}, \frac{h}{3})$.

Presupunem că în G_1 şi G_2 acţionează două forţe paralele de acelaşi sens, de intensităţi proporţionale cu ariile $A_1 = \frac{bh}{2}$ şi $A_2 = \frac{Bh}{2}$. Centrul acestor forţe paralele va avea coordonatele:

$$\xi = \frac{\frac{b+2c}{3}\cdot\frac{hb}{2} + \frac{b+B+c}{3}\cdot\frac{Bh}{2}}{\frac{(B+b)h}{2}}; \quad \eta = \frac{\frac{2h}{3}\cdot\frac{bh}{2} + \frac{h}{3}\cdot\frac{Bh}{2}}{\frac{(B+b)h}{2}} = \frac{2b+B}{3(B+b)}\cdot h.$$

5) Placă dată poate fi considerată ca alcătuită din 3 plăci: una semicirculară AMD cu centrul de greutate în $G_1(-\frac{4a}{3\pi}, 0)$ cu aria $\frac{\pi a^2}{2}$, alta ABCD dreptunghiulară cu cdg în $G_2(b,0)$ de arie $4ab$ şi a treia BEC în formă de triunghi echilateral cu cdg în $G_3(2b + \frac{a\sqrt{3}}{3}, 0)$ de arie $a^2\sqrt{3}$. Acum coordonatele cdg G al plăcii date vor fi (fig.2.5l.)

$$\eta = 0 \text{ şi } \xi = \frac{-\frac{4a}{3\pi}\cdot\frac{\pi a^2}{2} + b\cdot 4ab + (2b + \frac{a\sqrt{3}}{3})a^2\cdot\sqrt{3}}{\frac{\pi a^2}{2} + 4ab + a^2\sqrt{3}} =$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$= \frac{2}{3}\ \frac{a^2 + 12\cdot b^2 + 6\sqrt{3}\cdot ab}{a\sqrt{3} + 8b + 2\sqrt{3}\cdot a}\ .$$

8o. 1) In conformitate cu figura, avem (vedeţi fig.2.52.)

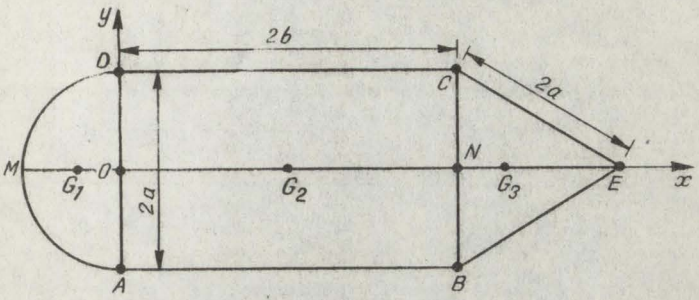


Fig.2.51.

$$\xi = \frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy} = \frac{\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[\int_{x=\frac{1}{4y}}^{x=5-4y} x\,dx\right]dy}{\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[\int_{x=\frac{1}{4y}}^{x=5-4y} dx\right]dy} = \frac{\frac{1}{2}\int_{1/4}^{1}\left[(5-4y)^2 - \frac{1}{y^2}\right]dy}{\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[5-4y-\frac{1}{y}\right]dy} =$$

$$= \frac{9}{15 - 16\cdot \ln 2}\ ;\quad \eta = \frac{9}{4(15 - 16\cdot \ln 2)}\ .$$

2) Axa Oy fiind axă de simetrie pentru placă, avem $\xi = 0$. Rămîne să calculăm pe η; ori (vedeţi fig.2.53.)

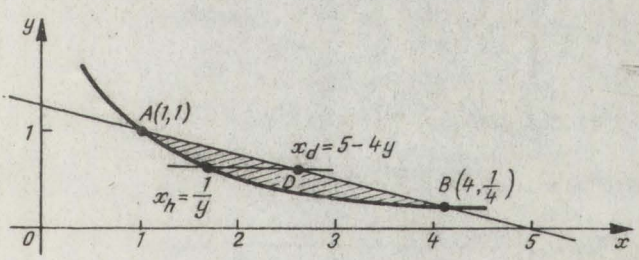


Fig.2.52.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

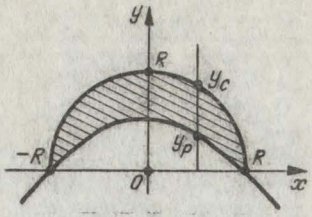


Fig.2.53.

$$\eta = \frac{\int_{-R}^{R}\left[\int_{y_p}^{y_c} y\,dy\right]dx}{\int_{-R}^{R}\left[\int_{y_p}^{y_c} dy\right]dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2-\frac{(R^2-x^2)^2}{4R^2}\right)dx}{\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}-\frac{R^2-x^2}{2R}\right)dx} = \frac{16\cdot R}{5(3\pi-4)}$$

3) Placa are prima bisectoare ca axă de simetrie. De aceea $\xi = \eta$. Calculăm pe ξ și avem (vedeți fig.2.54.)

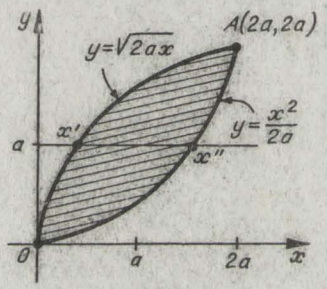


Fig.2.54.

$$\xi = \frac{\int_0^{2a}\left[\int_{x'}^{x''} x\,dx\right]dy}{\int_0^{2a}\left[\int_{x'}^{x''} dx\right]dy} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{2a}\left(-\frac{y^4}{4a}+2ay\right)dy}{\int_0^{2a}\left(-\frac{y^2}{2a}+\sqrt{2ay}\right)dy} = \frac{9\cdot a}{16}.$$

4) Calcul analog: $\xi = -\frac{a}{2}$; $\eta = \frac{8a}{5}$.

5) Calcul analog: $\xi = \frac{2}{5}$; $\eta = 1$.

6) $\xi = 0$, $\eta = \dfrac{\frac{9}{2}\ln(2+\sqrt{3}) - 3\sqrt{3}}{4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}} > 0.$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

81. 1) Placa are drept axă de simetrie dreapta de ecuaţie $x = a\pi$.

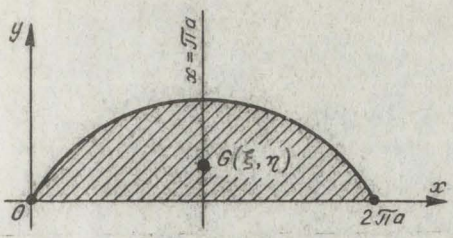


Fig.2.55.

Deci $\xi = a\pi$. Avem apoi

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2 dx}{\text{arie}} = \frac{1}{2 \text{ arie}} \cdot \int_0^{2\pi} a^3(1-\cos\theta)^3 \cdot d\theta = \frac{5a}{6},$$

căci aria unei bucle de cicloidă este egală cu $3\pi a^2$.

2) Din cauza simetriei avem

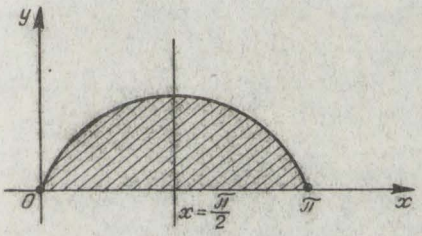


Fig.2.56.

$\xi = \frac{\pi}{2}$. Acum

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} y^2 dx}{\text{arie}} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx}{\int_0^{\pi} \sin x\, dx} = \frac{\frac{\pi}{4}}{-\cos x\Big|_0^{\pi}} = \frac{\pi}{8}.$$

3) Evident $\eta = 0$; apoi calculăm pe ξ.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\xi = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\text{aria } D} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\rho=a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho\cdot\rho\,d\rho\right]\cos\theta\,d\theta}{\text{aria } D} =$$

$$= \frac{\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta}{\frac{1}{2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\rho^2 d\theta} = \frac{\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{16}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}a}{8}.$$

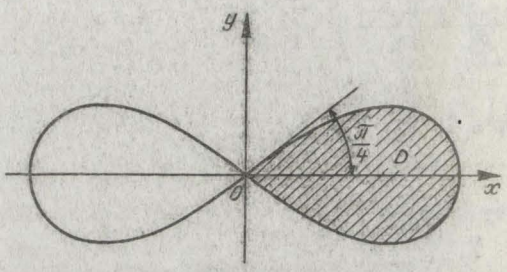


Fig.2.57.

4) Placa are o axă de simetrie (y=x); de aceea vom avea $\xi = \eta$

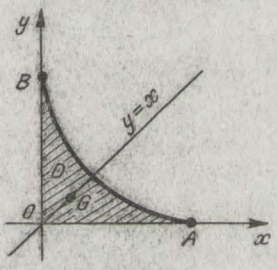


Fig.2.58.

In continuare găsim

$\xi = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\text{aria } D}$. Facem transformarea $x = a\rho\cos^3\theta$, $y = a\rho\sin^3\theta$

$J = 3a^2\rho\sin^2\theta\cos^2\theta$, $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$;

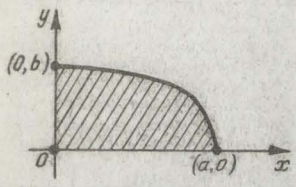
https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\iint_D x\,dx\,dy = 3a^3\int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \sin^2\theta\, d\theta = \frac{8a^3}{105};$$

$$\text{aria } D = \frac{1}{2}\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 3a^2\rho\, d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{3a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(1-\cos 4\theta)\,d\theta = \frac{3a^2\pi}{32}. \text{ Acum } \xi = \frac{\frac{8a^3}{105}}{\frac{3\pi a^2}{32}} = \frac{256\cdot a}{315} = \eta.$$

82.1) Introducem coordonatele ρ şi θ legate de x şi y prin relaţiile:



$$x = a\rho\cos\theta,\ y = b\rho\sin\theta,\quad 0 \le \rho \le 1$$

şi $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; $J = ab\rho$. Avem în continuare

$$\xi = \frac{\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\rho\cos\theta\, ab\rho\, d\rho\, d\theta}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{\frac{a^2b}{3}}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{4a}{3\pi}$$

Fig.2.59.

Analog găsim $\eta = \frac{4b}{3\pi}$.

2) Placa are pe Ox drept axă de simetrie.

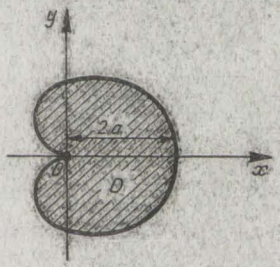


Fig.2.60.

De aceea cdg se va afla pe această axă.

Vom avea apoi

$$\xi = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho\cos\theta\cdot\rho\, d\rho\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta} = \frac{5a}{6}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Avem de pildă

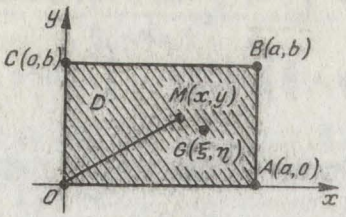


Fig.2.61.

$$\xi = \frac{\iint_D \mu(x,y)\, x\, dxdy}{\iint_D \mu(x,y)\, dxdy} = \frac{3}{12} \cdot \frac{2a^3 + 2ab^2}{a^2 + b^2}$$; la fel găsim

$$\eta = \frac{1}{4} \cdot \frac{2a^2b + 3b^3}{a^2+b^2}.$$

4) În formulele $\xi = \frac{\iint_D x\, dxdy}{\iint_D dxdy}$ şi $\eta = \frac{\iint_D y\, dxdy}{\iint_D dxdy}$ trecem la coordonatele polare ρ şi φ legate de x şi y prin relaţiile:

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$; se ştie că $dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi$.

Atunci vom putea scrie, de pildă, pentru ξ

$$\xi = \frac{\iint_{D_1} \rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi}{\iint_{D_1} \rho\, d\rho\, d\varphi} = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left[\int_0^{\rho(\varphi)} \rho^2 d\rho\right]\cos\varphi\, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left[\int_0^{\rho(\varphi)} \rho\, d\rho\right] d\varphi} = \frac{\frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi}.$$

Procedeu asemănător pentru η.

83. 1) Avem $\xi = \frac{\iint_S x\, d\sigma}{\iint_S d\sigma}$, $\eta = \zeta = 0$, unde

$$d\sigma = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\, dydz$$ cu $x_y = \frac{\partial x}{\partial y}$ şi $x_z = \frac{\partial x}{\partial z}$;

$$\xi = \frac{\iint_D \frac{y^2+z^2}{10}\sqrt{1 + \frac{y^2+z^2}{25}}\, dydz}{\frac{1}{5}\iint_D \sqrt{25+y^2+z^2}\, dydz}$$; trecem la coordonatele

polare ρ, θ definite prin $y = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$ şi integrăm pe discul D

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

din planul x = 0, de rază 10 și centru O; găsim

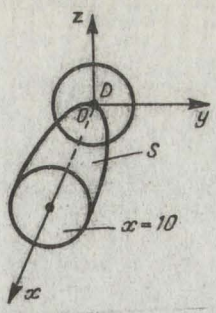


Fig.2.62.

$$\xi = \frac{\frac{1}{50}\int_0^{2\pi}\int_0^{10}\rho\sqrt{25+\rho^2}\cdot\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\theta}{\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{10}\sqrt{25+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta} = \frac{1}{10}\cdot\frac{\frac{2}{3}5^4(25\sqrt{5}+1)}{\frac{5^3}{3}(5\sqrt{5}-1)} = \frac{1+25\sqrt{5}}{5\sqrt{5}-1}.$$

2) Evident $\xi = \eta = 0$, $\zeta = \frac{\iint_S z\,d\sigma}{2\pi R^2} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cdot\cos\theta R^2\cdot\sin\theta\cdot d\varphi\,d\theta}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}$.

3) Evident $\xi = \eta = 0$, iar $\zeta = \frac{\iint_S z\,d\sigma}{\iint_S d\sigma}$; din ecuația dată

deducem $z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$, $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b}{a}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

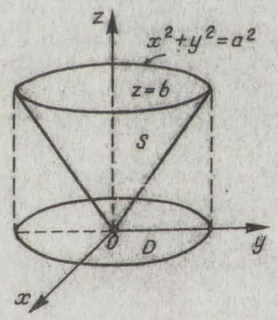


Fig.2.63.

$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\,dx\,dy$; apoi

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}\, dxdy = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \cdot \pi a^2 = a\sqrt{a^2+b^2}\cdot\pi;$$

$$\iint_S z\,d\sigma = \iint_D \frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\, dxdy = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2} \int_0^{2\pi}\int_0^a \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2\pi ab\sqrt{a^2+b^2}}{3}; \text{ acum}$$

$$\zeta = \frac{2b}{3}$$

4) Vom avea $\xi = \eta = 0$ şi $\zeta = \dfrac{\iint_S z\,\mu\, d\sigma}{\iint_S \mu\, d\sigma}$; vom folosi coordonatele sferice $\rho = R, \theta$ şi φ. Avem

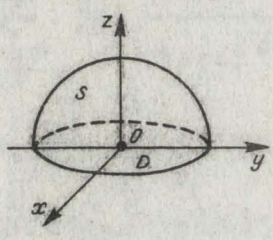


Fig.2.64.

$$\zeta = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\theta \cdot k\,R\sin\theta \cdot R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\cdot R\sin\theta \cdot R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi} = \frac{4R}{3\pi}.$$

84. 1) După exerciţiul 77.2) avem

$$\bar{g}_1 = \frac{\bar{r}_2+\bar{r}_3+\bar{r}_4}{3},\ \bar{g}_2 = \frac{\bar{r}_3+\bar{r}_4+\bar{r}_1}{3},\ \bar{g}_3 = \frac{\bar{r}_4+\bar{r}_1+\bar{r}_2}{3},\ \bar{g}_4 = \frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3}{4}.$$

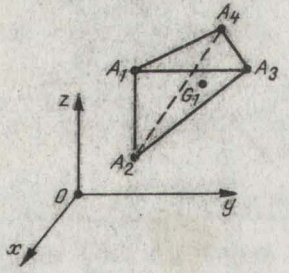


Fig.2.65.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

De aici, prin adunare, găsim imediat $\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3+\bar{r}_4 = \bar{g}_1+\bar{g}_2+\bar{g}_3+\bar{g}_4$.

2) Împărţim corpul piramidal în straturi (plăci) paralele cu baza ADC, de grosimi infinitezimale.

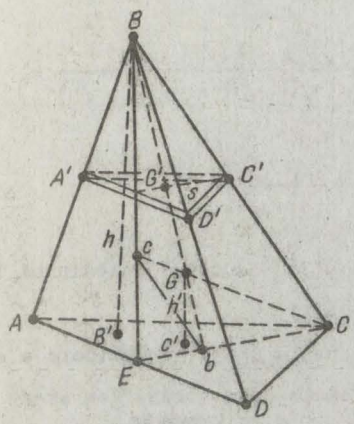


Fig.2.66.

Un asemenea strat are cdg G', la intersecţia medianelor $\Delta A'B'C'$.

Deci cdg al corpului piramidal G se va găsi pe segmentul Bb, care uneşte vîrful B cu cdg al feţei triunghiulare ADC.

Repetînd raţionamentul în ipoteza că ABD ar fi bază, ajungem la concluzia că $G \in Cc$, unde c e cdg al feţei ABD. Să determinăm acum poziţia lui G faţă de B sau b. Ori $\Delta cbG \sim \Delta CBG$ şi $\Delta Ebc \sim \Delta ECB$. Deci $\frac{BG}{bG} = \frac{BC}{bc} = \frac{CE}{bE} = \frac{3}{1}$;

Deci BG = 3 Gb sau BG + Gb = = 3 Gb + Gb = $\frac{1}{4}$ Bb.

Astfel G se află la distanţa $h' = \frac{h}{4}$ de baza ADC.

Rezultatul rămîne adevărat, cum se poate demonstra uşor, pentru orice corp piramidal şi pentru corpurile conice circulare drepte.

3) Fie h înălţimea trunchiului de piramidă triunghiulară şi μ înălţimea piramidei mici $OB_1B_2B_3$. Conform unei teoreme de geometrie putem scrie $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\mu}{\mu+h}$, de unde găsim

$\mu = h\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $h + \frac{\mu}{4} = h\cdot\frac{4\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{4(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$.

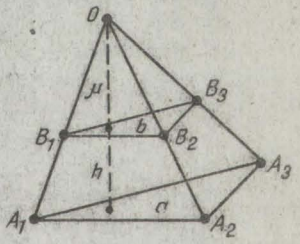


Fig.2.67.

Acum trunchiul de piramidă poate fi considerat ca alcătuit din piramida mare $OA_1A_2A_3$ de volum $\frac{a(h+\mu)}{3}$, cu cdg în G_1, la distanţa $\frac{\mu+h}{4}$ faţă de baza $A_1A_2A_3$, din care s-a "scos" piramida mică $OB_1B_2B_3$, de volum $\frac{b\mu}{3}$, cu cdg în G_2, la distanţa

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$\frac{\mu}{4}$ de baza $B_1B_2B_3$ sau la distanţa $h + \frac{\mu}{4}$ de baza $A_1A_2A_3$. Dacă notăm cu z distanţa de la centrul de greutate G al trunchiului de piramidă la baza $A_1A_2A_3$, atunci vom avea

$$z = \frac{\frac{a(h+\mu)^2}{12} - \frac{b\mu(h+\frac{\mu}{4})}{12}}{\frac{a(h+\mu)}{3} - \frac{b\mu}{3}} = \frac{h}{4} \cdot \frac{a^2 - 4b\sqrt{ab} + 3b^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})} =$$

$$= \frac{h}{4} \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(a + 2\sqrt{ab} + 3b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(a+\sqrt{ab}+b)} = \frac{h}{4} \frac{a+2\sqrt{ab} + 3b}{a+\sqrt{ab}+b}.$$

La acelaşi rezultat se ajunge şi cu ajuterul calculului integral.

85. 1) Fie $R^2z^2 = h^2(x^2+y^2)$ ecuaţia pînzei superioare a suprafeţei conice care mărgineşte corpul conic considerat. Vom avea

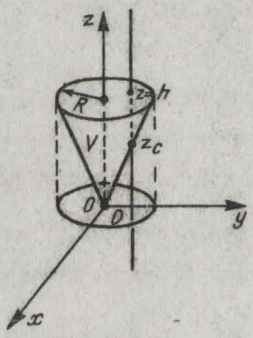


Fig.2.68.

$$\xi = \eta = 0 \quad \text{şi} \quad \zeta = \frac{\iiint z\,dxdydz}{\frac{\pi R^2 h}{3}} =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^2 h} \iint_D z^2 \Big|_{z=z_c}^{z=h} dxdy =$$

$$= \frac{3}{2R^2h\pi} \iint_D \left[(h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right] dxdy =$$

$$= \frac{3h^2}{2R^2h\pi} \cdot \pi R^2 - \frac{3h^2}{2\pi R^4 h} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \cdot \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{3h}{2} - \frac{3h}{4} = \frac{3h}{4}.$$

2) Avem evident $\xi = \eta = 0$, respectiv

$$\zeta = \frac{\iiint z\,dxdydz}{\frac{2\pi R^3}{3}} = \frac{3}{2\pi R^3} \iint_D \frac{z^2}{2} dxdy, \text{ unde } z^2 = R^2 - x^2 - y^2;$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

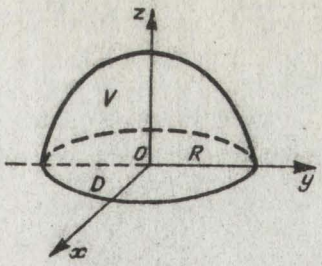


Fig.2.69.

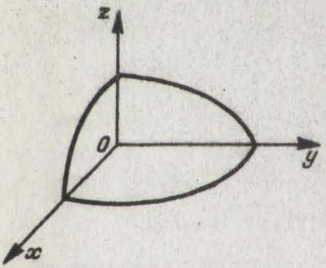
$$\zeta = \frac{3}{4\pi R^3}\iint_D (R^2-x^2-y^2)dxdy = \frac{3}{4\pi R^3}\cdot R^2\pi R^2 - \frac{3}{4\pi R^3}\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho^3 d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{3R}{4} - \frac{3}{2\cdot R^3}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{3\cdot R}{8}.$$

3) Pentru a descrie intreaga optime de elipsoid, folosim coordonatele ρ, θ, φ legate de cele carteziene x,y,z prin relaţiile:

$$x = a\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\in[0,1]$$
$$y = b\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\ J = abc\rho^2\sin\theta$$
$$z = c\rho\cos\theta \qquad ,\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Avem apoi



$$\xi = \frac{\iiint_V x\,dxdydz}{\frac{1}{8}\cdot\frac{4\pi abc}{3}} =$$

$$= \frac{6}{abc\pi}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\rho\sin\theta\cos\varphi\, abc\rho^2 d\rho\sin\theta\, d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{6a}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3a}{8};\quad \eta = \frac{3b}{8},\ \zeta = \frac{3c}{8}.$$

Fig.2.7o.

4) Evident avem $\xi = \eta = 0$. Rămîne de calculat $\zeta = \frac{\iiint_V z\,dxdydz}{\iiint_V dxdxdz} = \frac{A}{B}$;

Cda. 236/981 Fasc. 9

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$A = \iint_D \frac{z^2}{2} \Big|_z^a dxdy = \iint_D \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right)^2\right] dxdy = \frac{a^2}{2} \text{ aria } D -$$

$$- \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right)^2 dxdy; \quad (1)$$

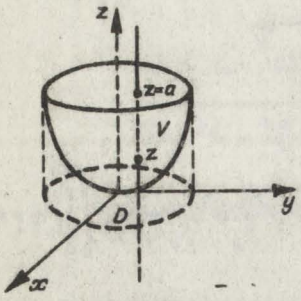


Fig.2.71.

aria D = aria elipsei D de semiaxe $a = \sqrt{2 \cdot ph}$ și $b = \sqrt{2 \cdot qh}$; deci aria $D = \pi \cdot ab = 2\pi\sqrt{pq} \cdot h$.

Pentru a calcula ultima integrală din (1), folosim coordonatele ρ și θ în locul lui x și y, legate de acestea din urmă prin relațiile:

$$x = \sqrt{2.ph}\,\rho\cos\theta, \quad 0 \le \rho \le 1,$$

$$y = \sqrt{2.q.h.}\,\rho\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi; \quad J = ab\rho;$$

$$- \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right)^2 dxdy = - \frac{h^2}{2}\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)^2 ab\,\rho\,d\rho d\theta =$$

$$= - \frac{1}{2} h^2 ab.2\pi. \frac{1}{6} = - \frac{2\sqrt{pq}.\pi h^3}{6} = - \frac{\pi\sqrt{pq}\,h^3}{3};$$

$$A = \frac{h^3}{2}\, 2\pi\sqrt{pq} - \frac{\pi\sqrt{pq}h^3}{3} = \frac{2}{3}\pi. h^3\sqrt{pq};$$

$$B = \iiint_V dxdydz = \iint_D \left[h - \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right)\right] dxdy = h^2.\pi 2\sqrt{pq} -$$

$$- h\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2.\, ab\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi h^2\sqrt{pq} - \frac{h^2}{4} . 2\pi. 2\sqrt{pq} =$$

$$= 2\pi h^2\sqrt{pq} - \pi\sqrt{pq}h^2 = \pi h^2\sqrt{pq}.$$

Rezultă $\gamma = \frac{A}{B} = \frac{2}{3} h$.

86. 1) Fie G_4 cdg al feței triunghiulare $A_1A_2A_3$.

Centrul de greutate G al tetraedrului are proprietatea că $\overrightarrow{A_4G} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A_4G_4}$. Avem apoi $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{GG_4} + \overrightarrow{G_4A_1}$; $\overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{GG_4} + \overrightarrow{G_4A_2}$; $\overrightarrow{GA_3} = \overrightarrow{GG_4} + \overrightarrow{G_4A_3}$; $\overrightarrow{GA_4} = \overrightarrow{GG_4} + \overrightarrow{G_4A_4}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

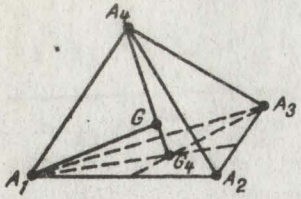


Fig.2.72.

De aici prin adunare deducem

$$\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GA_i} = 4\overrightarrow{GG_4} + \overrightarrow{G_4A_4} + \underbrace{\overrightarrow{G_4A_1}+\overrightarrow{G_4A_2}+\overrightarrow{G_4A_3}}_{\delta} =$$

$$= \overrightarrow{A_4G_4} + \overrightarrow{G_4A_4} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}.$$

2) Se știe că cilindrul are cdg în $C_1(0, 0, \frac{h}{2})$ și volumul $V_1 = \pi r^2 h$, iar corpul emisferic are $C_2(0,0,-\frac{3r}{8})$ și volumul $V_2 = \frac{2\pi r^3}{3}$. Pentru echilibrul indiferent, este necesar și suficient ca centrul de greutate al corpului întreg să se afle în planul z = 0, în C, adică să avem

$$\zeta = \frac{z_1V_1 + z_2V_2}{V_1+V_2} = 0.$$

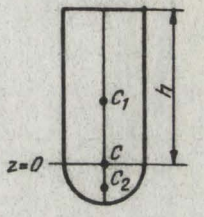


Fig.2.73.

De aici rezultă $\frac{h}{2} \cdot \pi r^2 h = \frac{3r}{8} \cdot \frac{2\pi r^3}{3}$, respectiv $\frac{r}{h} = \sqrt{2}$, care e raportul cerut.

87. 1) Fie secțiunea prin planul yOz în corpul respectiv, desenată în figura alăturată.

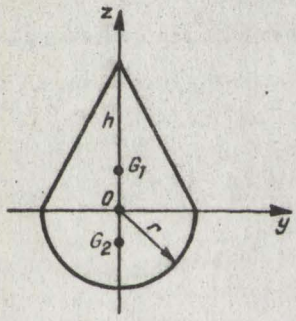


Fig.2.74.

După cum am văzut, conul are cdg în $G_1(0,0, \frac{h}{4})$ și volumul $V_1 = \frac{\pi r^2 h}{3}$, iar corpul emisferic are cdg în $G_2(0,0 - \frac{3r}{8})$ și volumul $V_2 = \frac{2\pi r^3}{3}$.

Scriind că $G \equiv O$, prin urmare că cdg al întregului corp are cota zero, rezultă

$$\zeta = 0 = \frac{\frac{h}{4} \cdot V_1 - \frac{3r}{8} V_2}{V_1 + V_2}, \text{ i.e. } h = r\sqrt{3}.$$

2) Cele două suprafețe se taie după cercul $x^2+y^2 = 4a^2$ în planul de nivel z = 2c. Evident

$$\xi = \eta = 0.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Rămîne de calculat (vedeţi fig.2.75.)

$$\zeta = \frac{\iiint_V z\,dxdydz}{\iiint_V dxdydz} = \frac{\frac{1}{2}\iint_D (z_e^2 - z_p^2)\,dxdy}{\iint_D (z_e - z_p)\,dxdy} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2a} \left(\frac{e^2}{a^2}\rho^2 - \frac{e^2}{4a^4}\rho^4\right)\rho\,d\rho\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{2a} \left(\frac{e\rho}{a} - \frac{e\rho^2}{2a^2}\right)\rho\,d\rho\,d\theta} =$$

$$= \frac{\frac{4\pi a^2 e^2}{3}}{\frac{4\pi a^2 e}{3}} = e.$$

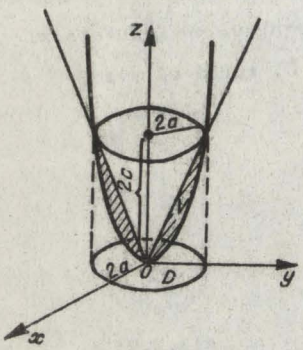


Fig.2.75.

3) Evident $\xi = 0$, $\eta = 0$. Rămîne de calculat:

$$\zeta = \frac{\iiint_V z\,\mu\,dxdydz}{\iiint_V \mu\,dxdydz} = \frac{A}{B}.$$ Folosind coordonatele polare ρ, θ, φ avem $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho \cos\theta$, cu

$J = \rho^2 \sin\theta$.

Acum

$$A = \iiint_V zk\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = k\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\theta \cdot \rho^3 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= k\frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{k\pi R^5}{5};$$

$$B = \iiint_V k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = k\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\rho =$$

$$= k \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{k\pi R^4}{2};$$ acum obţinem:

$$\zeta = \frac{\frac{k\pi R^5}{5}}{\frac{k\pi R^4}{2}} = \frac{2}{5} \cdot R.$$

4) Vom avea

$$\xi = \eta = \frac{\iiint_V x\,dxdydz}{\iiint_V dxdydz} = \frac{A}{C}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

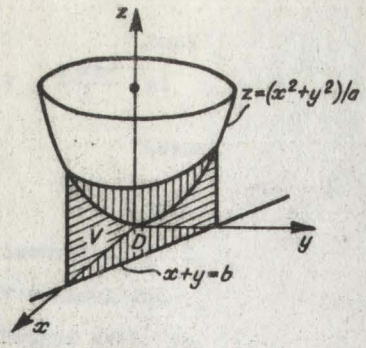


Fig.2.76.

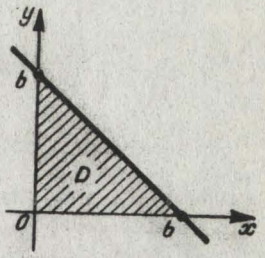


Fig.2.77.

și $\zeta = \dfrac{\iiint_V z\,dxdydz}{\iiint_V dxdydz} = \dfrac{B}{C}$.

Calculăm $A = \iint_D xz \Big|_{z=0}^{z=\frac{x^2+y^2}{a}} dxdy = \iint_D \dfrac{x^2+y^2}{a}\, x\,dxdy$, unde $D \subset R^2$ este domeniul desenat alături în figura 2.77. In final găsim:

$$A = \frac{4b^5}{6e\cdot a}\ ;\ \text{rezultă analog}$$

$$C = \iint_D z\,dxdy = \iint_D \frac{x^2+y^2}{a}\,dxdy = \frac{b^4}{6a} \quad \text{și}$$

$$B = \iiint_V z\,dxdydz = \iint_D \frac{z^2}{2}\Big|\,dxdy = \frac{7\cdot b^6}{18e\cdot a^2}\ ;$$

în definitiv avem

$$\xi = \eta = \frac{2}{5}b;\quad \zeta = \frac{7\cdot b^2}{3e\cdot a}\ .$$

5) Dacă z = 0, atunci din $hy + 2\cdot Rz = hR$ deducem y=R, iar cînd y = -R, avem z = h. Rezultă forma corpului desenat alăturat. Corpul are drept plan de simetrie planul x = 0, i.e. planul yOz (fig.2.78.)

De aceea vom avea $\xi = 0$, iar apoi

$$\eta = \frac{\iiint_V y\,dxdydz}{\iiint_V dxdydz} = \frac{A}{C} \quad \text{și} \quad \zeta = \frac{\iiint_V z\,dxdydz}{\iiint_V dxdydz} = \frac{B}{C}.$$

Să calculăm pe A, B, C. Avem:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

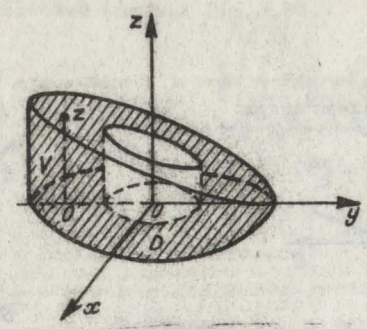


Fig.2.78.

$A = \iint_D yz \Big|_{z=0}^{z_p = \frac{hR-hy}{2R}} dxdy$, unde D e coroana circulară

$r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2$ din planul xOy. A se obţine imediat dacă trecem la coordonatele polare ρ şi θ ($x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $J = \rho$):

$$A = \int_r^R \int_0^{2\pi} \rho \sin\theta \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{2R}\rho \sin\theta\right) \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{\pi h(r^4-R^4)}{8R}$$

Analog rezultă $C = \frac{1}{2} \cdot \pi h(R^2-r^2)$ şi $B = \frac{\pi h^2(R^2-r^2)(3R^2-r^2)}{32\,R^2}$.

Cu aceste valori pentru A,B,C găsim în final:

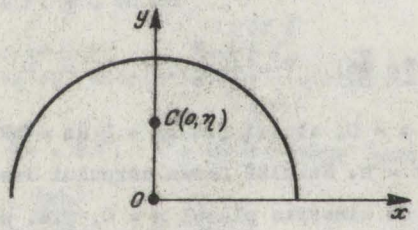


Fig.2.79.

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{R^2+r^2}{4R}, \quad \zeta = \frac{h(3R^2-r^2)}{16 \cdot R^2}$$

88. 1) După prima teoremă avem (vedeţi figura 2.79. de mai sus).

$A = 2\pi\eta\ell$ $\qquad A = 4\pi R^2$, $\ell = \pi R$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Inlocuim şi găsim $\eta = \frac{2R}{\pi}$.

După a doua teoremă a lui Guldin - Pappaus avem $V = 2\pi A\eta$; $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ şi $A = \frac{\pi R^2}{2}$.

Rezultă $\eta = \frac{4R}{3\pi}$.

2) Considerăm că rotim placa hexagonală din figură în jurul laturii A_1B_1. Ea generează un corp solid. Fie V volumul lui. După a doua teoremă a lui Guldin-Pappus avem (vedeţi figura 2.8o.)

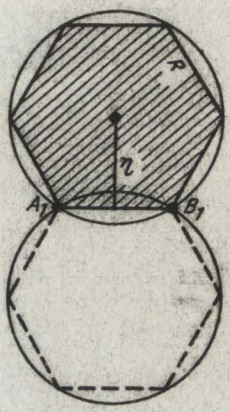


Fig.2.8o.

$V = 2\pi\eta A$, unde $\eta = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ şi $A = \frac{6R^2\sqrt{3}}{4}$

Rezultă $V = \frac{9\pi R^3}{2}$.

3) Am văzut la problema 73.2) că acest arc de curbă are odg în $G(a\pi, \frac{5a}{6})$.

De aceea aplicînd prima teoremă Guldin-Pappaus, găsim:

$A = 2\pi\eta l = 2\pi \cdot \frac{5a}{6} \cdot 8a = \frac{40}{3}\pi a^2$.

§ 2.3. Echilibrul punctului material şi al rigidului

2.3.1. Rezumat teoretic

2.3.1.1. Echilibrul punctului material liber şi al rigidului liber.

2.3.1.1.1. Condiţii necesare şi suficiente pentru echilibrul unui punct material liber

1. Un punct material A, acţionat de un sistem de forţe $(\bar{F}_i)$ aplicate în A şi situate pe o aceeaşi dreaptă x'Ox este în echilibru

$\Longleftrightarrow \bar{R}_i := \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{0}$, i.e. $\Longleftrightarrow$

$$R_x := \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0. \qquad (1)$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2. Un punct material A, acționat de un sistem de forțe $(\vec{F}_i)$, aplicate în A și situate în planul $\mathbb{R}^2$ raportat la reperul $(O,\vec{i},\vec{j})$ este în echilibru $\Longleftrightarrow \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \Longleftrightarrow$

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \text{și} \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0. \qquad (2)$$

3. Un punct material A, acționat de un sistem de forțe $(\vec{F}_i)$, aplicate în A din spațiul $\mathbb{R}^3$ raportat la reperul $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ este în echilibru $\Longleftrightarrow \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \Longleftrightarrow$

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \text{ și } R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad (3)$$

2.3.1.1.2. <u>Condiții necesare și suficiente pentru echilibrul unui corp rigid liber</u>

1. Un corp rigid C acționat de un sistem de forțe $(\vec{F}_i)$ aplicate în punctele $A_i(\vec{F}_i)$ ale lui C este în echilibru $\Longleftrightarrow$ torsorul acestui sistem de forțe în raport cu orice punct din $\mathbb{R}^3$, de pildă în raport cu originea O a unui reper cartezian ortogonal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, este egal cu zero, i.e.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \text{ și } \vec{\mathcal{M}}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}. \qquad (4)$$

Dacă $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$ și $\vec{\mathcal{M}}_o = (M_x, M_y, M_z)$, atunci ecuațiile vectoriale (4) sînt echivalente cu următoarele 6 ecuații scalare:

$$\begin{aligned} R_x &= 0 \qquad & M_x &= 0 \\ R_y &= 0 \quad \text{și} & M_y &= 0 \\ R_z &= 0 \qquad & M_z &= 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2. Ecuaţiile (5) ne dau 6 relaţii între proiecţiile forţelor $(\vec{F}_i)$ şi coordonatele punctelor lor de aplicaţie. Aceste puncte de aplicaţie aparţinînd solidului C, coordonatele respective se vor exprima în funcţie de cei 6 parametri care fixează poziţia solidului în spaţiu. In fond deci cele 6 relaţii scalare (5) pot fi privite ca nişte ecuaţii pentru determinarea celor 6 parametri de poziţie ai solidului, parametri corespunzători celor 6 grade de libertate pe care le are un astfel de solid rigid liber.

3. Ecuaţiile (5) se simplifică mult în cazurile în care sistemul de forţe $(\vec{F}_i)_{i=\overline{1,n}}$ este alcătuit din forţe concurente în acelaşi punct sau din forţe situate în acelaşi plan sau din forţe paralele etc.

2.3.1.2. Echilibrul punctului material supus la legături şi al rigidului supus la legături fără frecare

Un punct material sau un corp rigid supus la legături şi acţiunii unor forţe exterioare este în echilibru dacă sistemul de forţe alcătuit din forţele exterioare şi din forţele de legătură (sau reacţiunile care înlocuiesc echivalent legăturile) îndeplineşte condiţiile necesare şi suficiente de echilibru din cazul punctelor şi corpurilor rigide libere.

Legăturile simple ale punctului material şi ale rigidului perfect luciu se înlocuiesc după cum urmează:

Rezemarea (punctul material sau rigidul aşezat, rezemat pe un alt corp) se înlocuieşte cu o forţă $\vec{N}$, normală pe suprafaţa de rezemare, de valoare necunoscută.

Articulaţia în O (rigid cu punctul O fix) se înlocuieşte cu o forţă $\vec{R}$ cu originea în O, de direcţie, de sens şi de intensitate necunoscute.

Încastrarea în O (corp rigid fixat rigid într-un alt corp) se înlocuieşte cu o forţă $\vec{R}$ şi cu un moment $\vec{M}$ aplicate în O de direcţie, sensuri şi valori necunoscute.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Legarea cu fire se înlocuieşte astfel: se taie fiecare fir şi în locul lui se introduce o forţă cu originea în punctul de prindere al firului de corp, avînd direcţia sa dată de direcţia firului, sensul către exteriorul corpului şi intensitatea necunoscută.

2.3.1.3. Echilibrul unui punct material obligat să rămînă pe o suprafaţă lucie de ecuaţie $f(x,y,z) = 0$ (1) (o relaţie scalară).

Condiţia necesară şi suficientă de echilibru este

$\sum \vec{F}_i + \vec{R} = 0$, unde $\vec{R} = \lambda \operatorname{grad} f$ (2) (3 relaţii scalare)

Date: $f(x,y,z) = 0$ şi $\vec{F}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$

Necunoscute: x,y,z şi λ (x,y,z sînt coordonatele punctului material considerat).

Pentru determinarea celor 4 necunoscute avem 4 ecuaţii (1) şi (2) la dispoziţie.

2.3.1.4. Echilibrul unui punct obligat să rămînă pe o curbă lucie de ecuaţii: $f_1(x,y,z) = 0$ şi $f_2(x,y,z) = 0$ (1) (2 ecuaţii scalare).

Condiţia necesară şi suficientă de echilibru este

$$\sum \vec{F}_i + \vec{R} = 0, \quad \vec{R} = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 \qquad (2)$$

(3 ecuaţii scalare).

Date: $f_1(x,y,z) = 0$, $f_2(x,y,z) = 0$ şi $\vec{F}_i$, $i=1,2,\ldots,n$

Necunoscute: λ_1, λ_2, x,y,z (x,y,z sînt coordonatele punctului material considerat).

Pentru determinarea celor 5 necunoscute avem 5 ecuaţii (1) şi (2) la dispoziţie.

2.3.1.5. Echilibrul solidului rigid cu un punct fix O

Date: Sistemul de forţe $(\vec{F}_i)$.

Necunoscute: (6): poziţia unui punct al corpului şi reacţiunea $\vec{R}$ din O.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

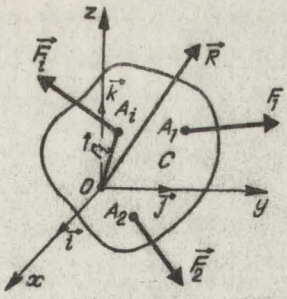


Fig.2.81.

Condiţiile necesare şi suficiente de echilibru sînt:

$$\mathcal{C}_O = 0 \Leftrightarrow \sum \vec{F}_i + \vec{R} = \vec{0} \qquad \text{(3 ecuaţii)}$$

$$\vec{M}_O = \vec{0} \qquad \text{(3 ecuaţii)}$$

Pentru determinarea celor 3 parametri scalari care fixează poziţia unui punct al solidului şi a celor 3 componente ale lui $\vec{R}$, i.e. R_x, R_y, R_z, avem exact 6 ecuaţii la dispoziţie.

2.3.1.6. Echilibrul solidului rigid cu o axă fixă

Date: sistemul de forţe $(\vec{F}_i)$ şi punctele fixe O şi O_1.

Necunoscute (7 la număr): $\vec{R}_1$, $\vec{R}$, θ.

Condiţii necesare şi suficiente de echilibru:

$$\sum \vec{F}_i + \vec{R} + \vec{R}_1 = \vec{0} \qquad \text{(3 ecuaţii)}$$

$$\vec{M}_O = \vec{0} \qquad \text{(3 ecuaţii)}$$

Pentru determinarea celor 7 necunoscute, în acest caz, dispunem doar de 6 ecuaţii.

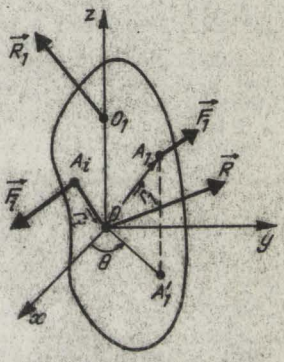


Fig.2.82.

2.3.1.7. Echilibrul cu frecare

Frecările sînt forţe sau momente de legătură care însoţesc orice mişcare sau tendinţă de mişcare a unui punct material sau rigid care se sprijină pe un alt corp.

In cadrul acestei culegeri de probleme menţionăm doar:

Frecarea de alunecare, ce apare la mişcarea de alunecare sau tendinţa de a se produce o astfel de mişcare a unui punct material sau rigid, cînd acesta se reazămă pe un alt corp.

Frecarea de alunecare are drept măsură o forţă $\vec{\Phi}$ conţinută în planul tangent comun corpurilor care vin în atingere, dirijată în

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

sens contrar mişcării sau tendinţei de mişcare, de intensitate cuprinsă între 0 şi μN, unde μ este coeficientul de frecare (determinat pe cale experimentală), iar $\vec{N}$ este apăsarea normală a unui corp asupra celuilalt în punctul de contact al acestora.

Introducînd forţa de frecare $\vec{\phi}$, alături de celelalte forţe sau momente care acţionează asupra unui punct material sau asupra unui rigid, în determinarea poziţiilor de echilibru ale unor astfel de corpuri se folosesc condiţiile necesare şi suficiente de la echilibrul punctelor şi corpurilor libere.

2.3.2. Probleme

89. (Puncte sau rigide acţionate de forţe concurente în plan)

1) Fie A un punct material în spaţiu, de masă m, supus acţiunii atractive a Pămîntului şi Lunii, acţiuni care variază invers proporţional cu pătratul distanţei dintre punct şi corpul atractiv. Unde trebuie să se afle punctul A pentru ca acţiunea Pămîntului şi Lunii să se neutralizeze reciproc?

2) Trei corpuri C_1, C_2, C_3 de mase m_1, m_2, m_3 sînt aşezate în vîrfurile unui triunghi isoscel $A_1A_2A_3$. Un punct material P din planul triunghiului, de masă m, este atras de cele 3 corpuri cu forţe newtoniene, adică cu forţe proporţionale cu produsul maselor şi invers proporţionale cu pătratul distanţelor dintre A_1 şi P, A_2 şi P şi A_3 şi P. Să se determine poziţia de echilibru a punctului P sub acţiunea celor trei forţe newtoniene.

3) Între două semiplane perpendiculare, netede, AB şi AC, este aşezată o sferă de centru O şi masă m. Determinaţi apăsarea pe care sfera o exercită pe fiecare plan, ştiind că planul AC face un unghi de 60° cu planul orizontal care trece prin A.

4) Un punct M, de greutate $\vec{G}$, poate aluneca fără frecare pe un cerc de rază R, fiind respins de punctul A (cel mai de jos) al cercului cu o forţă de intensitate $F = \frac{k}{AM^2}$. Să se determine poziţiile de echili-

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

bru ale punctului M și reacțiunea cercului în acele poziții.

9e. (Puncte sau rigide acționate de forțe concurente în spațiu).

1) Un corp de greutate P e suspendat cu ajutorul a trei bare

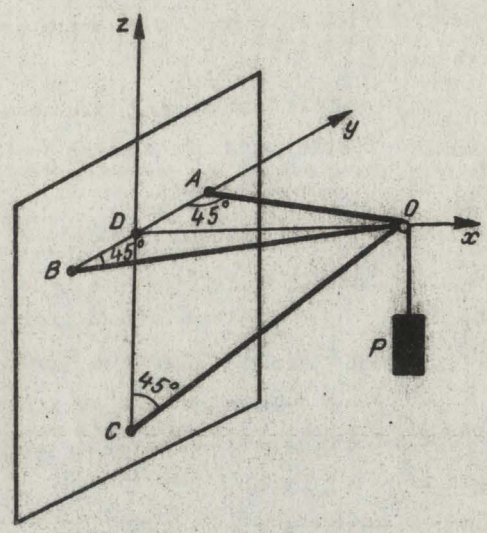


Fig.2.83.

articulate în O, OA, OB și OC ca în figură. Să se determine componentele greutății P după direcțiile OA, OB, OC.

2) Fie SABCDE o piramidă pentagonală regulată ca aceea din figură, având înălțimea h și raza cercului circumscris pentagonului de bază r. Asupra ei acționează forțele:

$\overline{F}_1 = \overline{SA}$, $\overline{F}_2 = \overline{SB}$, $\overline{F}_3 = \overline{SC}$ și $\overline{F}_4 = \overline{SE}$.

Determinați forța F_5, care trebuie aplicată în vîrful S al piramidei, pentru a menține piramida în echilibru.

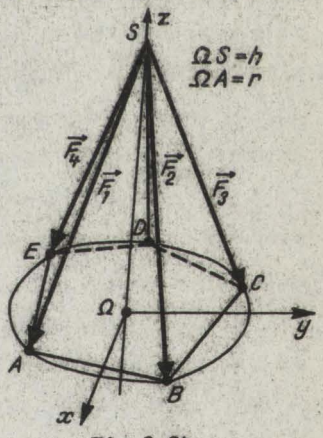


Fig.2.84.

3) Un cilindru omogen se reazămă pe alți doi cilindri identici cu primul și așezați pe o podea între 2 pereți verticali.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Se dau: greutatea G a fiecărui cilindru, raza lor r şi distanţa 2a dintre pereţi.

Se cere: a) reacţiunile pereţilor şi ale pedalei precum şi acţiunea pe care o exercită cilindrul de deasupra asupra celorlalţi doi cilindri de pe pedea.

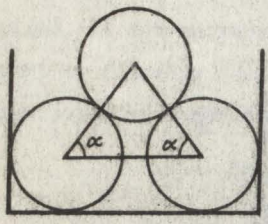


Fig.2.85.

b) Unghiul α, care caracterizează poziţia de echilibru a celor 3 cilindri (vedeţi figura alăturată).

91. (Rigide acţionate de forţe situate în acelaşi plan)

1) Sistemul din figură, alcătuit dintr-o bară OA de lungime a şi greutate G, articulată în O, legată în A cu un fir flexibil, inextensibil şi de masă neglijabilă, trecut peste un mic scripete S şi dintr-un corp de greutate P, se află în echilibru. Articulaţia O şi scripetele S se află pe aceeaşi orizontală şi distanţa OS este egală cu a. Să se studieze echilibrul barei OA (fig.2.86.).

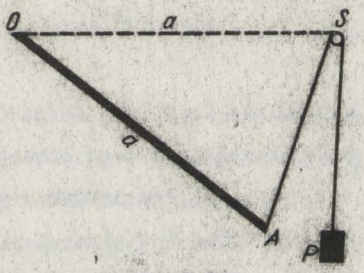


Fig.2.86.

2) O placă în formă de paralelogram ABCD poate aluneca într-un plan orizontal. După direcţiile AB şi CD, în sensul literelor scrise, sînt aplicate 2 forţe proporţionale cu mărimile acestor laturi, coeficientul de proporţionalitate fiind k.

Să se determine ce forţe $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ trebuie aplicate după direcţia AC şi după o paralelă prin D la AC, astfel încît placa să rămînă în echilibru.

3) Două semiplane metode formează un unghi diedru, au muchia comună şi sînt înclinate faţă de acesta cu unghiurile a şi b. Într-un plan perpendicular pe muchia unghiului diedru este aşezat o bară grea AB de lungime ℓ. În poziţia de echilibru,

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

aceasta face cu planul orizontal unghiul e. Să se exprime acest unghi în funcţie de unghiurile a şi b.

4) O bară curbă, OBA, în formă de semicerc, grea, este articulată în punctul O şi se reazimă, fără frecare, în punctul B, mijlocul semicercului $\overset{\frown}{OBA}$. Bara are sudat în extremitatea A un corp având o masă egală cu aceea a barei.

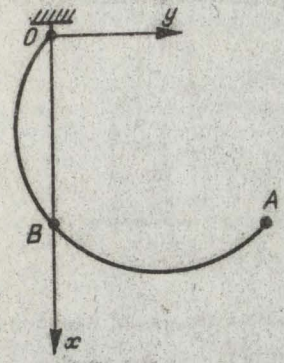


Fig.2.87.

Ştiind că bara e în echilibru în poziţia din figură, să se calculeze reacţiunile din O şi din B.

5) O bară omogenă AB, de greutate P, rămâne într-un plan vertical şi este articulată în capătul inferior A, iar de capătul B e legat un fir trecut pe un mic scripete D, situat pe verticala punctului A. La extremitatea firului e legată o greutate Q. Să se găsească poziţia de echilibru a barei şi reacţiunea din A.

6) Intr-un acelaşi plan vertical xAy se consideră o bară AB, omogenă şi grea, şi un cui C normal pe acest plan.

Bara AB se sprijină, fără frecare, cu extremitatea A pe peretele vertical Ay, şi se mai sprijină, tot fără frecare, pe cuiul C.

Să se determine poziţia de echilibru şi reacţiunile.

Examen Facultatea de Ştiinţe, Bucureşti.

7) Un semicerc omogen şi greu $\overset{\frown}{AB}$, de rază r, aşezat într-un plan vertical, este legat de capătul A cu un fir inextensibil de masă neglijabilă. Firul are lungimea ℓ şi este fixat cu un capăt de extremitatea A a semicercului, iar cu celălalt capăt de un punct O. Semicercul se sprijină şi pe o bară perfect lucie OT_1, verticală, care trece prin O.

Să se scrie ecuaţia care dă unghiul φ dintre firul OA şi bara OT_1, în poziţia de echilibru. Acest unghi fiind cunoscut, să se determine tensiunea din firul OA şi reacţiunea barei în T_1.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

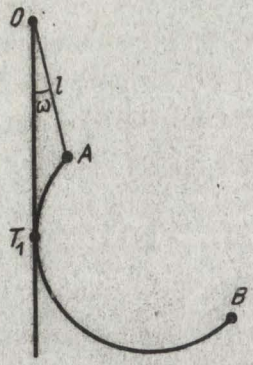


Fig.2.88.

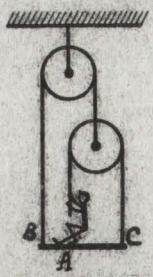


Fig.2.89.

8) Un om de 6o kg stă pe o platformă de 3o kg susţinută cu ajutorul unor frînghii trecute peste scripeţi, ca în figura 2.89. Lungimea platformei este ℓ. Să se afle cu ce forţă trebuie să tragă omul pentru ca sistemul să rămînă în echilibru. Se neglijează frecările, platforma se consideră orizontală, iar frînghiile verticale.

9) Un sistem material invariabil AOB este alcătuit din două bare AO şi OB, rectilinii, omogene, grele, sudate în O, care au aceeaşi greutate pe metrul liniar. Lungimea OB = 2,OA şi $\widehat{AOB} = 6o^{\circ}$.

Sistemul AOB este suspendat într-un cui de vîrful O.

Să se afle, în poziţia de echilibru, tangenta unghiului pe care OA îl face cu verticala punctului O.

92. (Corpuri rigide acţionate de forţe paralele).

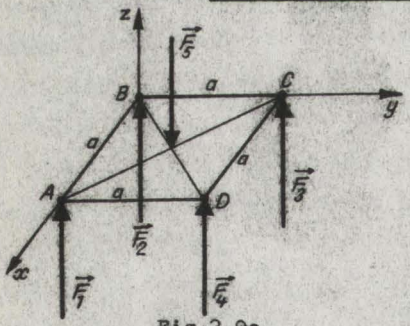


Fig.2.9o.

1) Placa pătrată ABCD este menţinută în poziţie orizontală sub acţiunea forţelor $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ şi $\vec{F}_5$. Se dă $F_4 = \frac{1}{n} F_5$. Să se determine F_1, F_2 şi F_3 în funcţie de n şi de F_5.

2) Bara AB de lungime 5 metri este acţionată de forţele desenate în

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

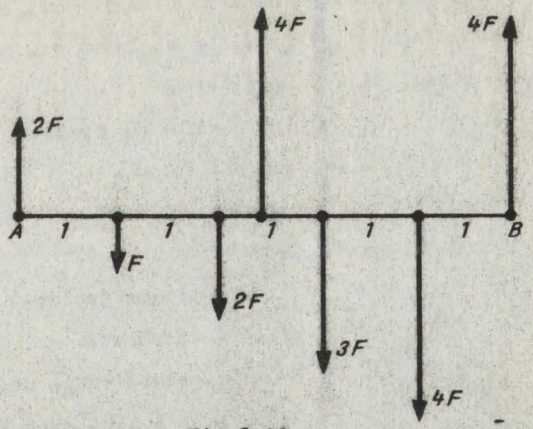


Fig.2.91.

figură. Cercetaţi dacă această bară este în echilibru sau nu.

3) Un om duce o greutate G pe umăr, cu ajutorul unui baston AB, de lungime ℓ, anume greutatea G atîrnă de capătul A al bastonului, iar acesta se sprijină pe umăr într-un punct C, echilibrul fiind realizat cu ajutorul mîinii, care ocupă o poziţie M între B şi C.

Se întreabă cum variază apăsarea pe umăr cînd poziţia mîinii M variază între C şi B şi pentru ce poziţie a mîinii M această apăsare este minimă?

Concursul de admitere la Politehnică, Bucureşti, 1940

93. (Corpuri rigide acţionate de cupluri)

1) Un corp emisferic, omogen, de greutate G este acţionat de greutatea Q, ca în figura 2.92.

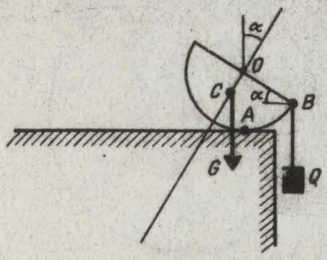


Fig.2.92.

Determinaţi unghiul α în poziţia de echilibru a acestuia. Aplicaţie: $G = \frac{8 \cdot Q}{5}$.

2) Se consideră 3 cuburi omogene şi egale cu mărime, avînd greutăţile: 1o N, 2o N şi 3o N. Aceste 3 cuburi se sudează între ele în ordinea greutăţilor crescînde 1o N, 2oN şi 3o N şi se obţine un corp în formă de prizmă cu baza un pătrat.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Prizma se aşează pe o platformă orizontală. Să se calculeze forţa minimă, care trebuie aplicată în planul bazei superioare, perpendicular pe o latură a acestei baze, în mijlocul ei, pentru ca prizma să se răstoarne atunci cînd e aşezată:

a) cu cubul de 3e N pe platformă, respectiv

b) cu cubul de 1e N pe platformă.

94: (Corpuri rigide supuse acţiunii unui sistem oarecare de forţe).

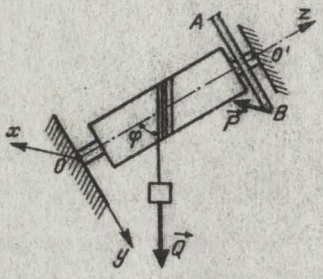


Fig.2.93.

Un troliu înclinat are forma din figura alăturată:

La extremitatea unei frînghii înfăşurate pe o tobă este atîrnată greutatea $\vec{Q}$. Pe un braţ perpendicular pe axa tobei în B se exercită o forţă $\vec{P}$ perpendiculară pe AB.

Să se determine condiţiile de echilibru şi reacţiunile axei troliului în O şi O'.

95: (Puncte materiale şi corpuri rigide acţionate de trei forţe concurente).

1) O bilă B de greutate P e atîrnată de un punct imobil A (vedeţi figura) situat deasupra unei sfere de centru O şi rază r, cu ajutorul unui fir AB de lungime l, la distanţa AC = d de sferă şi rămîne pe suprafaţa sferei. Ştiind că punctele A, C, O sînt coliniare, să se afle tensiunea în fir şi reacţiunea sferei asupra bilei.

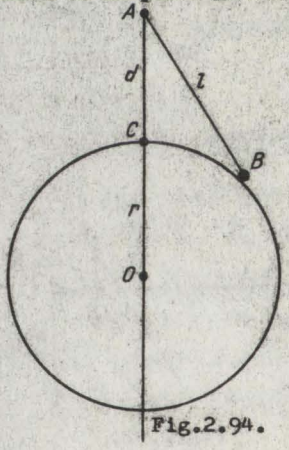


Fig.2.94.

2) Trei corpuri de greutăţi P, Q şi G sînt suspendate de un fir trecut peste două role A şi C, pe care firul

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

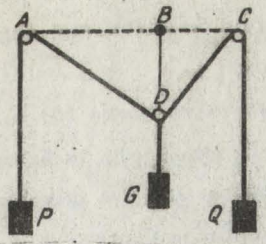


Fig.2.95.

alunecă fără frecare, greutatea G fiind legată în D. In poziţia de echilibru a sistemului, se cere raportul $\frac{AB}{BC}$ (fig.2.95.).

96. (Puncte materiale obligate să rămînă pe o suprafaţă lucie)

1) Să se determine modulul forţei $\vec{F}$, orizontale, necesare pentru a menţine un punct material greu de masă m pe un plan luciu, înclinat cu unghiul α faţă de orizontală.

Să se afle şi mărimea reacţiunii şi poziţia de repaus a punctului.

2) Un punct material M, greu, de masă m, e obligat să rămînă pe suprafaţa unei sfere lucii de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$. Să se afle poziţia de echilibru a punctului M, ştiind că acesta e atras de punctul A (a,0,0) al sferei cu forţa $\vec{F} = -\lambda \overrightarrow{AM}$, $\lambda > 0$.

97. (Puncte materiale obligate să rămînă pe o curbă lucie).

1) Să se găsească poziţia de echilibru a unui punct material greu M, de greutate $\vec{P}$, obligat să rămînă pe periferia unui disc de rază r, aflat într-un plan vertical.

Punctul este respins de diametrul vertical Ox cu o forţă orizontală $\vec{F}$, proporţională cu distanţa la acest diametru, i.e. $F = ky$, $k \in R_+^*$ constantă fizică dată (fig.2.96.).

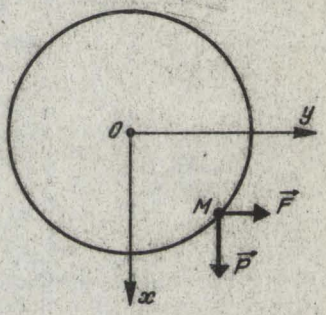


Fig.2.96.

2) Un punct material M de greutate $m\vec{g} = \vec{G}$ poate aluneca fără frecare pe o elipsă de ecuaţiei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, situată într-un plan vertical. Punctul este respins de axa Oy cu forţa $\vec{F} = \lambda x\vec{i}$.

Să se studieze echilibrul acestui punct (vedeţi fig.2.97.).

3) Un punct material M se află pe o curbă lucie (C) din planul xOy. El e respins de o forţă $\vec{F}_1 = k.\overrightarrow{OM}$ şi este solicitat de o forţă

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

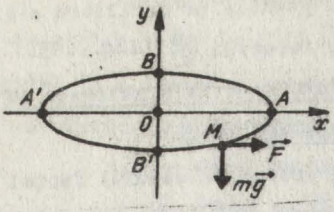


Fig.2.97.

$\vec{F}_2$ de intensitate constantă, tangentă la curbă, orientată în sensul arcelor descrescătoare.

Să se determine curba (C) a.î. punctul M să fie în echilibru în orice poziţie a sa pe curba (C). De asemenea să se determine reacţiunea curbei.

98. (Echilibru cu frecare)

1) Un punct material A de greutate $\vec{G}$ se află în echilibru într-o emisferă aspră, cînd raza OA face unghiul α cu verticala prin punctul O.

Să se determine forţa $\vec{Q}$ care poate acţiona asupra lui A, ştiind că $\mu(=\operatorname{tg}\varphi)$ este coeficientul de frecare dintre punct şi emisferă şi că supertul lui $\vec{Q}$ trece prin punctul cel mai de jos B al emisferei (vedeţi figura alăturată 2.98.), fără a modifica echilibrul.

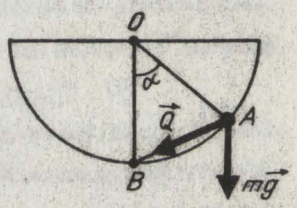


Fig.2.98.

2) Un lanţ de lungime ℓ cu greutatea pe unitatea de lungime egală cu p(N/m) alunecă pe sistemul de plane înclinate ABC, ramurile lanţului fiind paralele cu linia de cea mai mare pantă a planelor. Coeficientul de frecare fiind acelaşi, μ, pe ambele plane, să se determine lungimea x corespunzătoare poziţiei de echilibru (vedeţi fig.2.99.).

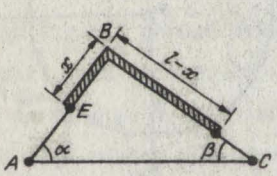


Fig.2.99.

3) Să se determine poziţiile de echilibru ale unui punct material greu, obligat să rămînă pe o suprafaţă sferică aspră.

4) Să se determine poziţia în care un punct material greu poate sta în echilibru pe o elice circulară aspră, de ecuaţii parametrice:

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ z = b\theta,\quad \theta : I \longrightarrow R,$$

ştiind că axa Oz este dirijată vertical (în sus), iar coeficientul de frecare este μ .

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

5) O scară AB de lungime ℓ, grea se sprijină cu capătul A pe un perete perfect luciu Oy, vertical, şi cu celălalt capăt B pe sol.

Să se afle unghiul maxim α_0 dintre scară şi perete, pentru care scara nu cade, ştiind că coeficientul de frecare dintre sol şi scară este μ.

6) O bară omogenă AB de greutate G se sprijină cu frecare într-un ghidaj circular de rază r, situat într-un plan vertical distanţa de la centrul cercului O la bară fiind OC = b.

Să se determine, în poziţia de echilibru a barei, unghiul făcut de perpendiculara coborîtă din O pe bara AB şi diametrul vertical al cercului (prin O).

7) Un corp omisferic, de greutate 2G şi rază r este aşezat ca în figura alăturată (vedere într-o secţiune făcută cu un plan prin centrul sferei, perpendicular pe muchia unghiului diedru xOy) şi este în echilibru.

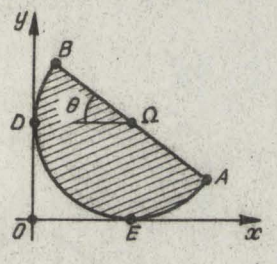


Fig.2.1oo

Diametrul AB face cu orizontala unghiul θ. Pe axa Oy nu există frecare, iar pe axa Ox există frecare cu coeficientul de frecare $\mu = \frac{5}{12}$. Ştiind că echilibrul începe să se strice din momentul în care în B am aşezat un corp mic cu greutatea de cel puţin G, să se determine unghiul θ şi reacţiunile din E şi D, care acţionează asupra corpului omisferic.

2.3.3. Rezolvarea problemelor.

89. 1) Asimilăm Pământul şi Luna cu punctele P şi L din figură. Necesar şi suficient ca acţiunea Pământului asupra lui A să fie neutralizată de acţiunea Lunii este ca punctul A să aparţină segmentului de dreaptă PL şi ca $F_p = F_L$, i.e. $\frac{k_1}{r_1^2} = \frac{k_2}{r_2^2}$, cu $r_1 + r_2 = a$ = distanţa cunoscută Pământ-Lună.

Cda. 236/387 Fasc. 10

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

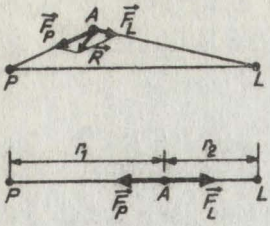


Fig.1.e1.

Rezultă $r_1 = \frac{ak_1}{k_1+k_2}$, $r_2 = \frac{ak_2}{k_1+k_2}$,

unde k_1 și k_2 sînt constante cunoscute din legea atracției universale.

2) Fie $\Delta A_1A_2A_3$, isoscel, raportat la reperul xOy din figură. Avem imediat:

$$PA_1 = \sqrt{(x+a)^2+y^2},\quad PA_2 = \sqrt{(x-a)^2+y^2};\quad PA_3 = \sqrt{x^2+(h-y)^2};$$

$$F_1 = f\frac{m_1m}{PA_1^2};\quad F_2 = f\frac{m_2m}{PA_2^2};\quad F_3 = f\frac{m_3m}{PA_3^2}$$

$$\vec{F}_1 = F_1\cdot\frac{\overrightarrow{PA_1}}{PA_1},\quad \vec{F}_2 = F_2\cdot\frac{\overrightarrow{PA_2}}{PA_2},\quad \vec{F}_3 = F_3\cdot\frac{\overrightarrow{PA_3}}{PA_3}$$

$$\overrightarrow{PA_1} = (-a-x)\vec{i} - y\vec{j};\ \overrightarrow{PA2} = (a-x)\vec{i}-y\vec{j},\ \overrightarrow{PA_3} = -x\vec{i}+(h-y)\vec{j} \qquad (1)$$

Acum condiția necesară și suficientă de echilibru pentru P este: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ sau, în proiecții pe Ox și Oy, conform relațiilor (1):

$$\begin{cases} \dfrac{-(a+x)fm_1m}{PA_1^3} + \dfrac{(a-x)fmm_2}{PA_2^3} + \dfrac{-xfmm_3}{PA_3^3} = 0 \\[2ex] \dfrac{-yfmm_1}{PA_1^3} - \dfrac{yfmm_2}{PA_2^3} + \dfrac{(h-y)fmm_3}{PA_2^3} = 0. \end{cases}$$

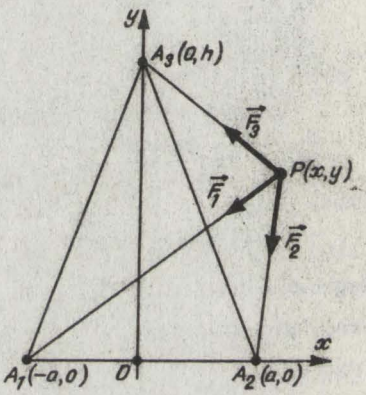


Fig.2.1e2.

De aici deducem coordonatele x și y ale punctului P, corespunzătoare pozițiilor de echilibru ale acestuia.

3) Acțiunea semiplanului AB asupra sferei este reprezentată de forța $\vec{N}_D$ aplicată în D, punctul de contact dintre sferă și semiplanul AB, perpendiculară pe planul AB, deci trecînd prin O. La fel acțiunea planul AC asupra sferei este reprezentată de forța $\vec{N}_E$. Rezultă

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

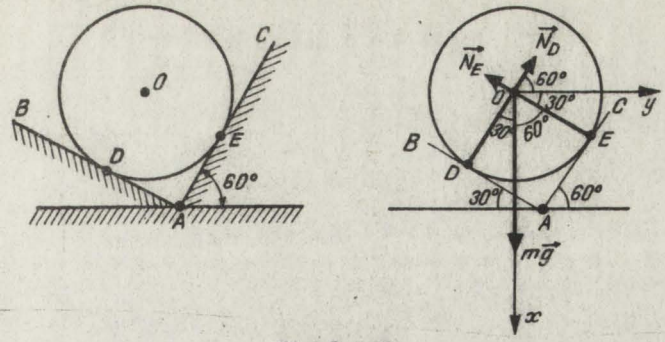


Fig.2.1e3.

că sfera sub acţiunea celor 3 forţe $m\vec{g}$, $\vec{N}_E$ şi $\vec{N}_D$ este în echilibru, toate forţele aflîndu-se în planul ce trece prin O şi e perpendicular pe planul orizontal. Pentru echilibru trebuie să avem:

$$\begin{cases} R_x = mg - N_D \cos 60^\circ - N_E \cos 30^\circ = 0 \\ R_y = N_E \cos 60^\circ - N_D \cos 30^\circ = 0. \end{cases}$$

De aici rezultă $N_D = \frac{mg}{2}$; $N_E = mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Apăsările exercitate de sferă pe cele două semiplane vor fi $\vec{N}_E' = -\vec{N}_E$ şi $\vec{N}_D' = -\vec{N}_D$.

4) Condiţia necesară şi suficientă de echilibru este: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} = \vec{0}$. Proiectînd pe tangenta şi normala în M, găsim:

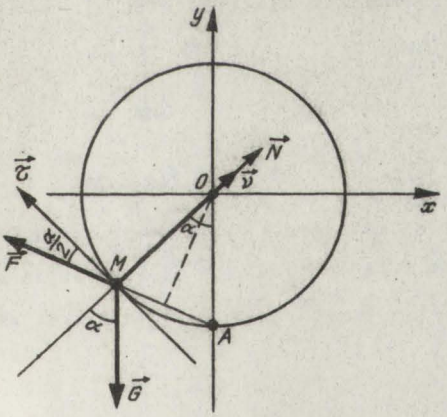


Fig.2.1e4.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\begin{cases} F\cos\frac{\alpha}{2} - G\sin\alpha = 0 & (1) \\ N - F\sin\frac{\alpha}{2} - G\cos\alpha = 0 & (2) \\ F = \dfrac{k}{4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} & (3) \end{cases}$$

Din aceste 3 relaţii deducem:

a) $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$, $\alpha = \pi$, $N = \frac{k}{4R^2} - G$;

b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{k}{GR^2}}$; $N = G$.

Deci există două poziţii de echilibru. Cea dintîi e evidentă şi corespunde la $\alpha = \pi$.

9o. 1) Acţiunile celor 3 bare OA, OB şi OC asupra punctului O (vedeţi figura 2.1o5) care susţine greutatea P, reprezentate prin forţele $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ şi $\vec{T}$, sînt arătate în figura de mai jos (vedeţi figura 1o6):

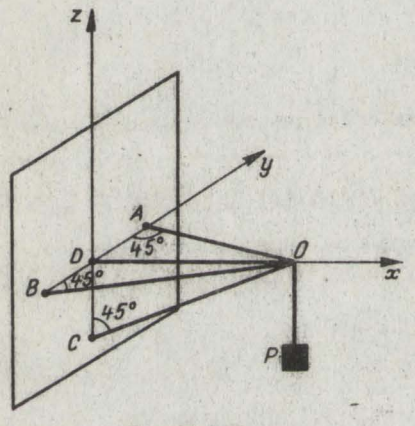


Fig.2.1o5.

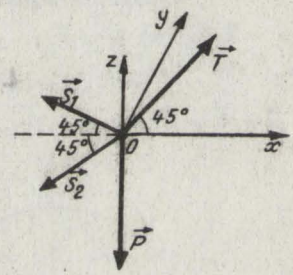


Fig.2.1o6.

Condiţiile necesare şi suficiente pentru ca punctul O să fie în echilibru sub acţiunea celor 4 forţe $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{T}$ şi $\vec{P}$ se obţin anulînd proiecţiile forţei rezultante $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$ pe cele trei axe.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Proiecţiile pe axa Ox: $S_1 \cos 45^\circ + S_2 \cos 45^\circ = T \cos 45^\circ$ i.e. $S_1 + S_2 = T$.

Proiecţiile pe axa Oy: $S_1 \sin 45^\circ - S_2 \sin 45^\circ = 0$ i.e. $S_1 = S_2 = S$.

Proiecţiile pe axa Oz: $T \sin 45^\circ - P = 0$; $T = \frac{P}{\sin 45^\circ} = P\sqrt{2}$.

Rezultă astfel $S = \frac{T}{2} = \frac{P\sqrt{2}}{2}$

Ţinînd seama de sensurile forţelor $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ şi $\vec{T}$, rezultă că greutatea $\vec{P}$ întinde barele OA şi OB şi comprimă bara OC, după cum e natural. Dacă vrem expresiile componentelor lui $\vec{P}$ pe cele 3 direcţii OA, OB, OC acestea sînt:

$$\vec{P}_{OA} = -\vec{S}_1 = -\left(-\frac{P\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{P\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right);$$

$$\vec{P}_{OB} = -\vec{S}_2 = -\left(-P\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{P\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right);$$

$$\vec{P}_{OC} = -\vec{T} = -\left(P\sqrt{2}\,\vec{i} + P\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right).$$

2) Alegem un sistem de axe Ωxyz ca în figura 2.1e7. După enunţ avem $S\Omega = h$, $\Omega A = r$, $\widehat{A\Omega B} = 72^\circ$.

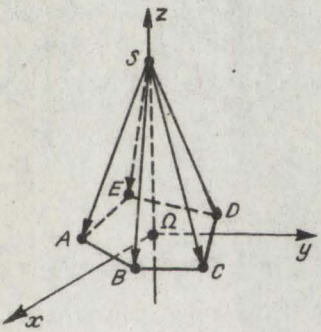


Fig.2.1e7.

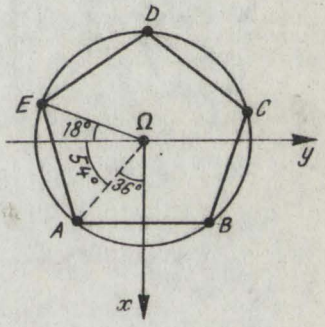


Fig.2.1e8.

Fie $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$ rezultanta celor 4 forţe aplicate. Acum avem imediat:

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z} = -4 \cdot h.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Pentru a calcula pe R_x şi pe R_y folosim reperul $x\Omega y$ din planul $z = 0$.

Proiecţia lui $\vec{SA}$ pe planul $z = 0$ este ΩA şi analoagele.

Rezultă (figura 2.1e8) cu uşurinţă

$R_y = Pr_{\Omega\vec{A}} + Pr_{\Omega\vec{E}} + Pr_{\Omega\vec{B}} + Pr_{\Omega\vec{C}} = 0$ (evident);

$R_x = 2\Omega A \cos 36^\circ - 2\Omega C \sin 18^\circ = 2r(\cos 36^\circ - \sin 18^\circ)$.

Dar $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ şi $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, iar $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$.

Avem deci $R_x = r$, $R_y = 0$, $R_z = -4h$.

Astfel $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = r\vec{i} - 4h\vec{k}$; pentru a menţine piramida în echilibru, în S trebuie aplicată forţa $\vec{F}_5 = -\vec{R} = -r\vec{i} + 4h\vec{k}$.

3) Din motive de simetrie avem (figura 2.1e9 a)) $R_A = R_B$, $R_C = R_D$ şi $R_E = R_F$.

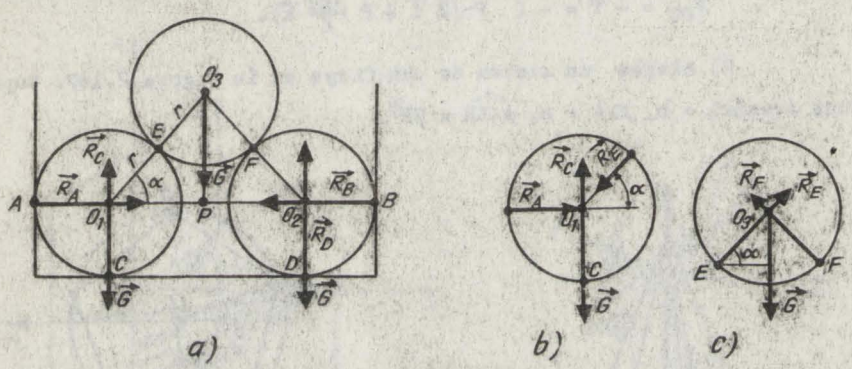


Fig.2.1e9.

Proiectînd toate forţele pe verticală găsim $R_C = R_D = \frac{3G}{2}$.

Eliberînd de legături cilindrul O_3 prin introducerea forţelor de legătură (figura 2.1e9 c)), rezultă $R_E = R_F = \frac{G}{2\sin\alpha}$. Procedînd la fel şi cu cilindrul O_1 (figura 2.1e9 b)) deducem $R_A = R_B = \frac{G}{2} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$. In plus din $\triangle O_1PO_3$, dreptunghic în P, obţinem $\cos\alpha = \frac{a-r}{2r}$ etc.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

91. 1) Facem o figură mai mare şi figurăm forţele $\vec{G}$, $\vec{P}$ şi $\vec{R}$ care acţionează bara OA; cu $\vec{R}$ am notat reacţiunea din articulaţia O.

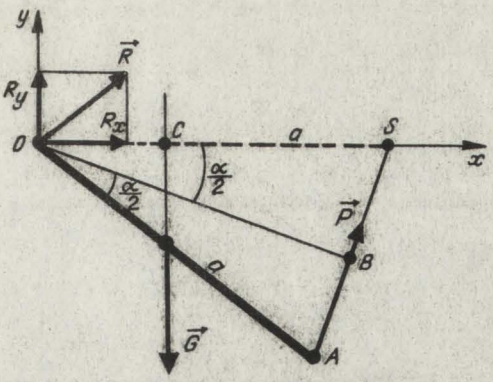


Fig.2.11e

Condiţia necesară şi suficientă de echilibru pentru bara OA este ca torsorul tuturor forţelor care îi sînt aplicate barei, inclusiv $\vec{R}$, calculat indiferent în care punct al planului R^2, să fie zero. Rezultă 3 ecuaţii scalare.

Observăm că bara este supusă acţiunii a 3 forţe: reacţiunea $\vec{R}(R_x, R_y)$ din articulaţie, greutatea proprie $\vec{G}(0, -G)$ şi tensiunea $\vec{P}(P \sin \frac{\alpha}{2}, P \cos \frac{\alpha}{2})$ din fir, aplicată în capătul A al barei OA.

Astfel ecuaţia $\vec{R} + \vec{G} + \vec{P} = \vec{0}$, în proiecţii, ne dă:

$$R_x + P \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \ (\alpha); \quad R_y + P \cos \frac{\alpha}{2} - G = 0 (\beta)$$

Alegînd punctul O drept pol în raport cu care calculăm momentele, putem scrie:

$$-G.\overline{OC} + P.\overline{OB} = 0 \quad \text{sau} \quad G \frac{a}{2} \cos \alpha = P \cdot a \cos \frac{\alpha}{2} \cdot (\gamma)$$

Relaţia (γ) ne defineşte unghiul α prin relaţia

$\cos \frac{\alpha}{2} = (P + \sqrt{P^2 + 2G^2})/2\,G$, $P < G/2$, iar ecuaţiile (α) şi (β) ne dau pe R_x şi R_y, adică pe $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{P^2 + G^2 - 2PG \cos \frac{\alpha}{2}}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Observaţie. Pentru $P \longrightarrow \frac{G}{2}$, evident $\alpha \longrightarrow 0$, iar pentru $P \longrightarrow 0$, avem evident că $\alpha \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

2) Pentru acest sistem de forţe scriem cele 3 condiţii de echilibru conform figurii 2.111:

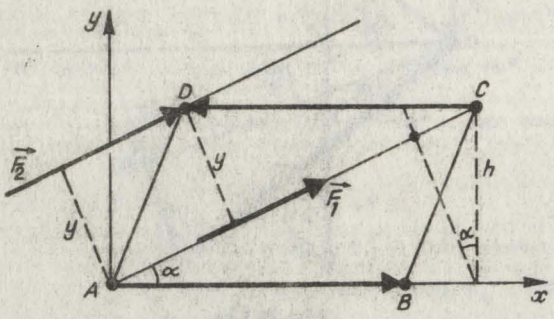


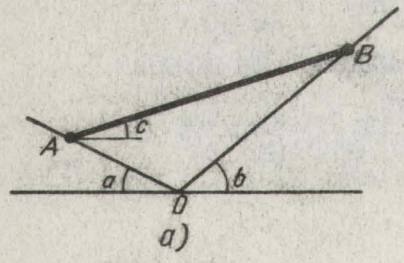
Fig.2.111.

$$\begin{cases} R_x = 0; \; k.AB - kCD + F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha = 0 \\ R_y = 0; \; F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha = 0. \\ \vec{M}_A = \vec{0}; \; k.DC \cdot h - F_2 y = 0; \end{cases}$$

Din $R_x = 0$ rezultă $F_1 = -F_2$; deci are loc şi $R_y = 0$.

Din cea de a treia ecuaţie, cu y cunoscut din geometria figurii, deducem $F_2 = k \frac{DC.h}{y} = k.\frac{S}{y}$, unde S e aria plăcii în formă de paralelogram.

3) Eliberăm bara AB din figura 2.112 a) de legături şi introducem, pe lîngă forţa $\vec{G}$ (greutatea proprie), forţele $\vec{N}_1$ şi $\vec{N}_2$, care reprezintă reacţiunile semiplanelor OA şi OB asupra barei.



a)

Fig.2.112a.

Astfel se vede că bara AB este acţionată de 3 forţe $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$ şi $\vec{N}_2$, ultimele forţe (reacţiunile semiplanelor OA şi OB) fiind perpendiculare pe OA şi OB (vedeţi figura 2.112 b)).

Condiţiile necesare şi suficiente de echilibru sînt $\vec{R} = \vec{0}$ şi $\vec{M} = \vec{0}$, adică

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

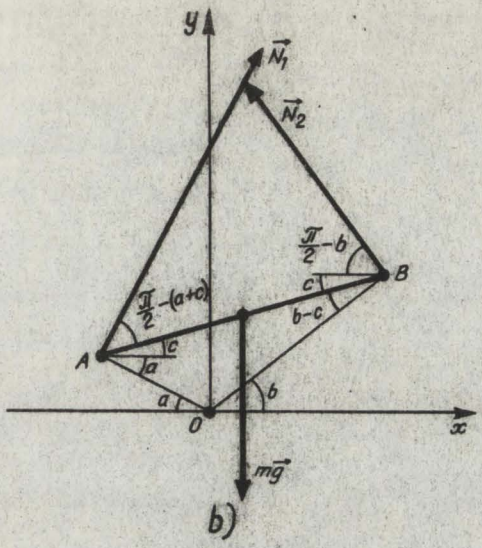


Fig.2.112 b.

$$\begin{cases} R_x: = N_1 \cos(\frac{\pi}{2} - a) - N_2 \cos(\frac{\pi}{2} - b) = 0 \\ R_y: = -mg + N_1 \sin(\frac{\pi}{2} - a) + N_2 \sin(\frac{\pi}{2} - b) = 0 \\ M_A: = mg \frac{\ell}{2} \cos c - N_2 \ell \sin(\frac{\pi}{2} + c - b) = 0. \end{cases}$$

Între aceste relaţii eliminăm pe N_1 şi N_2 şi găsim expresia cerută a lui c în funcţie de a şi de b, definită prin

$$2.\operatorname{tg} c = \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b.$$

4) Fie r raza semicercului. Atunci punctul C, centrul de greutate al semicercului, va avea coordonatele:

$$x_C = \frac{2}{\pi} \cdot r \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{\pi}$$

$$y_C = r\sqrt{2} - \frac{r\sqrt{2}}{\pi}$$

In acest punct va acţiona greutatea $\vec{P}$, iar în A forţa $\vec{P}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

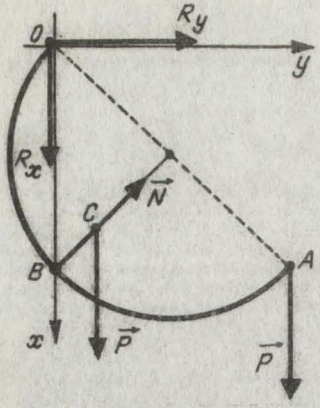


Fig.2.113.

Pentru a elibera semicercul de legăturile sale, în O vom introduce reacţiunea $\overline{R}(R_x, R_y)$, iar în B reacţiunea normală $\overline{N}$, îndreptată de la B către centrul semicercului.

Condiţiile de echilibru sînt

$$\begin{cases} \overline{R} + \overline{N} + \overline{P} + \overline{P} = \overline{0} \\ \overline{M}_0 = \overline{0} \end{cases}$$

Proiectînd aceste două relaţii vectoriale pe axe, ele ne dau

$$R_x = \frac{N\sqrt{2}}{2} - 2P; \quad R_y = -\frac{N\sqrt{2}}{2};$$

$$N = P\sqrt{2}(1 + \frac{1}{f}).$$

Dacă găsim:

$$\begin{cases} R_x = -P(1 + \frac{1}{f}) \\ R_y = P(-1 + \frac{1}{f}) \\ N = P\sqrt{2}(1 + \frac{1}{f}) \end{cases}$$

5) Fie $AB = \ell$, $AD = b$, $\sphericalangle DAB = \varphi$.

Forţele de legătură sînt $\overline{Q}$, tracţiunea din fir, aplicată în B şi reacţiunea $\overline{R}(R_x, R_y)$ a articulaţiei din A, aplicată în A, de mărime şi direcţie necunoscute.

Deci sub acţiunea forţelor $\overline{R}, \overline{P}$ şi $\overline{Q}$ bara poate fi considerată ca liberă.

De aceea în poziţia de echilibru avem $\overline{P} + \overline{R} + \overline{Q} = \overline{0}$ şi $\overline{M}_A = \overline{0}$ sau

$$R_x - Q\cos\psi = 0; \quad Q\sin\psi + R_y - P = 0;$$

$$AE \cdot Q - P\frac{\ell}{2}\sin\varphi = 0, \text{ unde } AE = d(A, BD).$$

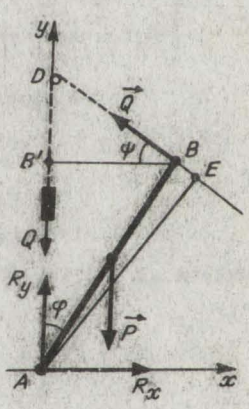


Fig.2.114.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Pe AE îl calculăm scriind două formule diferite pentru dublul ariei triunghiului ABD:

$$AE.BD = b\ell \cdot \sin\varphi, \qquad BD = \sqrt{\ell^2 + b^2 - 2b\ell\cos\varphi}$$

Ecuaţia momentelor ne dă poziţia de echilibru, descrisă cu ajutorul unghiului φ

$$\frac{b\ell \sin\varphi}{BD} Q - \frac{P\ell\sin\varphi}{2} = 0$$

Rezultă $\sin\varphi = 0$ adică $\varphi = 0$, respectiv $\cos\varphi = \frac{b^2+\ell^2-(\frac{2bQ}{P})^2}{2b\ell}$,

$\cos\varphi \leq 1$.

Unghiul φ fiind calculat, din $B'B = BD\cos\psi = \ell\sin\varphi$ deducem unghiul ψ şi apoi pe $R_x = Q\cos\psi$ şi $R_y = P - Q\sin\psi$, care sînt proiecţiile reacţiunii $\vec{R}$ din articulaţie.

6) Eliberăm bara AB de legături, introducînd forţele de legătură $\vec{R}_C$ şi $\vec{R}_A$.

Fie θ unghiul care caracterizează poziţia de echilibru şi $CH = a = dat$, iar $AB = 2\ell$.

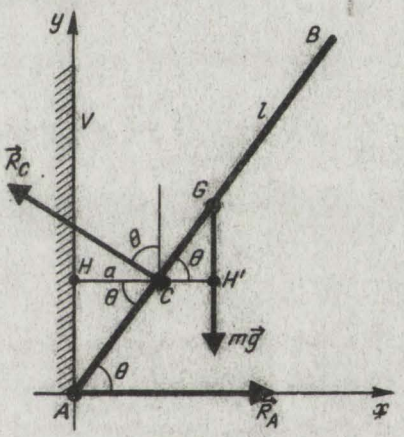


Fig.2.115.

Scriem că $\vec{R}_1 = \vec{R}_C + \vec{R}_A + m\vec{g} = \vec{0}$, care ne dă

$$\begin{cases} R_A - R_C\sin\theta = 0 \\ R_C\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} R_C = \frac{mg}{\cos\theta} \\ R_A = mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \end{cases}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Ecuaţia de momente faţă de C ne dă

$R_A \cdot AH = mg \cdot CH'$, cu $HA = a \cdot tg\theta$ şi $CH' = \ell \cos\theta - a$.

Rezultă în final $\cos\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{\ell}}$, $R_C = \frac{mg}{\cos\theta}$ şi $R_A = \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta$.

7) Introducem forţele de legătură $\vec{T}$ din fir şi $\vec{R}$, reacţiunea barei verticale.

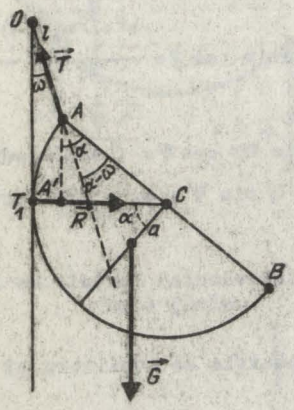


Fig.2.116.

Sub acţiunea forţelor $\vec{T}, \vec{R}$ şi $\vec{G}$ semicercul poate fi considerat ca liber.

Necunoscutele problemei sînt ω, α, T şi R (vedeţi figura 2.116).

Pentru echilibru scriem că $\vec{T}+\vec{R}+\vec{G}=\vec{0}$, că $\vec{M}_C = \vec{0}$ şi la aceste 3 relaţii adăugăm o condiţie geometrică: $\ell \sin\omega + r \sin\alpha = r$. Rezultă astfel ecuaţiile:

$$\begin{cases} R = T \sin\omega \text{ (ecuaţia de proiecţii pe orizontală)} \\ G = T \cos\omega \text{ (ecuaţia de proiecţii pe verticală)} \\ a \cos\alpha \cdot G = Tr \sin(\alpha - \omega) \text{ (ecuaţia de momente)} \\ \ell \sin\omega = r(1 - \sin\alpha), \end{cases}$$

care ne determină cele 4 necunoscute ω, α, T şi R.

8) Fie Q = 6oo N greutatea omului şi P = 3oo N greutatea platformei.

Dacă omul trage cu forţa T, atunci $F_2 = T$ şi $F_1 = 2T$. El apasă pe platformă cu forţa $Q - T$. Platforma va fi acţionată de forţele desenate aparte şi se va găsi în echilibru. Ecuaţia de proiecţie ne dă $P + Q - T = 3T$ (fig.2.118.), de unde

$$T = \frac{P+Q}{4} = \frac{9oo}{4} = 225 \text{ N}.$$

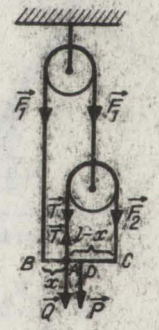


Fig.2.117.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

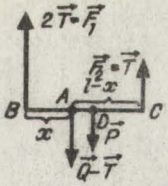


Fig.2.118.

Ecuaţia de momente faţă de A, $AB.F_1+AD.P = AC.F_2$, unde $BD = DC = \frac{\ell}{2}$, se mai scrie (vedeţi fig.2.118.)

$2Tx + P(\frac{\ell}{2} - x) = T(\ell - x)$, de unde găsim $x = 0{,}2\ell$.

Această problemă a fost dată la o Olimpiadă de fizică în Polonia.

9) In poziţia de echilibru a sistemului AOB, acesta se găseşte într-un plan vertical şi în acest plan introducem reperul xOy din figură.

Inlocuim legătura din O cu forţa $\vec{R}$, dirijată după Oy. Deci bara se află în echilibru sub acţiunea celor trei forţe, $\vec{R}, \vec{P}$ şi $2\vec{P}$. De aceea va trebui să avem $\vec{R} + \vec{P} + 2\vec{P} = \vec{0}$ şi $\vec{M}_0 = \vec{0}$.

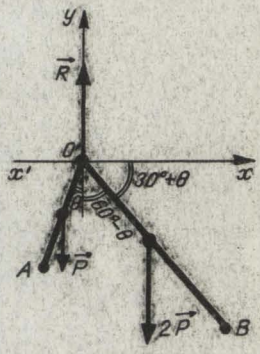


Fig.2.119.

Cu notaţiile $OA = 2\ell$, $OB = 4\ell$, greutatea barei OA = P şi greutatea barei OB = 2 P, avem:

$R = 3P$; $Pl \sin\theta = 2Pl \cos(\theta + 30^\circ)$

Rezultă $\operatorname{tg}\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

92. 1) Din condiţiile necesare şi suficiente de echilibru deducem:

(a) $F_1 + F_2 + F_3 + \frac{1}{m}F_5 = F_5$;

(b) $M_B\vec{F}_5 + M_B(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4) = \vec{0}$.

Aceste ecuaţii se mai scriu: $F_1 + F_2 + F_3 = (1 - \frac{1}{m})F_5$, $F_1 + F_4 = \frac{F_5}{2}$, $F_3 + F_4 = \frac{F_5}{2}$.

De aici rezultă $F_1 = F_3 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{m})F_5$ şi $F_2 = F_4 = \frac{1}{m}F_5$.

2) Avem $F_z = 2F - F - 2F + 4F - 3F - 4F + 4F = 0$

$M_A = -F - 2.2F + 2{,}5.4F - 3.3F - 4.4F + 4.5F = 0$

Deci bara AB are o poziţie de echilibru.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Avem o problemă de compunere a două forțe paralele și de același sens, $\vec{F}$ și $\vec{G}$. Rezultanta $\vec{R}$ va avea intensitatea (1) $R = F + G$ și poziția determinată de x, dedus din ecuația

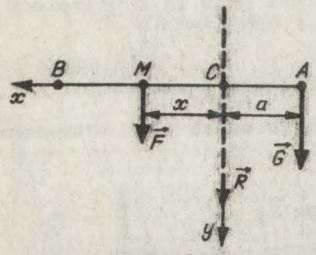


Fig.2.12e.

$$F.x = G.a, \text{ adică } x = \frac{G.a}{F} \qquad (2)$$

Scoțînd pe F din (2) și înlocuindu-l în (1), obținem

$$R = G + \frac{G.a}{x} \qquad (3)$$

Am găsit astfel apăsarea R, care este o funcție de $x, R:(0, \ell - a] \to \mathbb{R}$. Evident avem supremum $R = +\infty$, respectiv minimum $R = \frac{G\ell}{\ell - a}$ cînd $M \equiv B$.

$x \in (0, \ell - a]$ $\qquad$ $c \in (o, l - a]$

Observații. 1) Dacă bastonul e ținut oblic, rezultatele precedente rămîn încă valabile, după cum se constată imediat.

2. Dacă bastonul AB are greutatea proprie neneglijabilă, fie aceasta G', atunci găsim:

$$R = G + G' + \frac{2(G+G')a - G'\ell}{2x} \text{ etc.}$$

93. 1) Eliberăm emisfera de legătură pe care o are, înlocuind în A o forță de legătură de intensitate necunoscută, N, dirijată vertical (în sus). Acum corpul poate fi considerat ca liber și acționat de forțele $\vec{G}$, $\vec{N}$ și $\vec{Q}$, situate într-un același plan, planul de secțiune din fig.2.92. Condiția necesară și suficientă de echilibru a corpului este ca torsorul celor 3 forțe $\vec{G}, \vec{N}$ și $\vec{Q}$ să fie nul față de orice punct din planul de secțiune din figura 2.92.

Dacă vrem să determinăm numai pe α, este suficient să scriem că momentul forțelor față de punctul A e nul. Avem imediat

$$OC.\sin\alpha.G = OB.\cos\alpha.\ Q \text{ sau}$$

$$\frac{3R}{8}.\ \sin\alpha.G = R.\cos\alpha.Q$$

De aici aflăm $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8Q}{3G}$, respectiv $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{8Q}{3G}$

Pentru cazul particular $3G = 8Q$, obținem $\alpha = 45^\circ$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) a) Fie F intensitatea forţei cerute şi a latura cuburilor.

Faţă de AB, forţele $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$ dau momentul stabilizator de mărime $M_s = (G_1+G_2+G_3)\frac{a}{2}$, iar forţa $\vec{F}$ determină un moment de răsturnare de mărime $M_r = F \cdot 3a$.

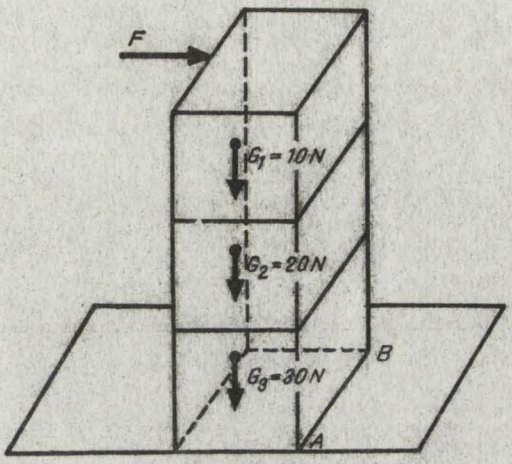


Fig.2.121.

Inegalitatea $M_r > M_s$ ne dă $F > \frac{G_1+G_2+G_3}{6} = 10$ N;

b) F nu depinde de poziţia cubului mai greu.

94. Alegem axele astfel (vedeţi figura 2.93.) : OO' ca axă Oz, axa Oy paralelă cu braţul AB, axa Ox perpendiculară pe Oy şi Oz, forţa $\vec{P}$ fiind paralelă cu Ox şi avînd acelaşi sens cu ea. Fie $\ell = OO'$, r raza tobei, b distanţa de la punctul de contact al frînghiei pînă la planul xOy, φ unghiul axei Oz cu verticala, AB = 2a, c distanţa de la AB la planul xOy. Astfel troliul e acţionat de forţele: $\vec{Q}(0, Q \cdot \sin\varphi, -Q \cdot \cos\varphi)$ aplicată în punctul de coordonate (r, 0, b);

$\vec{P}(P, 0, 0)$ aplicată în punctul de coordonate (0, a, c).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Forţele de legătură sînt reacţiunea $\vec{R}$ din articulaţia O, $\vec{R}(X_3, Y_3, Z_3)$, şi reacţiunea $\vec{R}'$ (X_4, Y_4, Z_4) din O'. Evident $Z_4 = 0$, fiindcă în O' nu există nicio presiune după axa treliului.

Sub acţiunea acester 4 forţe treliul poate fi considerat liber şi avem următoarele 6 ecuaţii de echilibru:

$$\text{Pe } Ox: \quad P + X_3 + X_4 = 0$$

$$\text{Pe } Oy: \quad Q \cdot \sin\varphi + Y_3 + Y_4 = 0$$

$$\text{Pe } Oz: \quad -Q \cdot \cos\varphi + Z_3 = 0;$$

$$M_{Ox}: \quad bQ \cdot \sin\varphi + \ell Y_4 = 0$$

$$M_{Oy} \quad r \cdot Q \cdot \cos\varphi - aP - \ell X_4 = 0$$

$$M_{Oz} \quad - r \cdot Q \cdot \sin\varphi + aP = 0.$$

Ultima ecuaţie este independentă de reacţiuni şi ne defineşte poziţia de echilibru a treliului: $\sin\varphi = \frac{aP}{rQ}$.

Din celelalte ecuaţii deducem componentele reacţiunilor:

$$X_3 = \left(\frac{a}{\ell} - 1\right) P - \frac{r}{\ell} Q \cdot \cos\varphi, \quad Y_3 = \left(\frac{b}{\ell} - 1\right) Q \cdot \sin\varphi, \quad Z_3 = Q \cdot \cos\varphi$$

$$X_4 = -\frac{a}{\ell} P + \frac{r}{\ell} Q \cos\varphi, \quad Y_4 = -\frac{b}{\ell} Q \cdot \sin\varphi, \quad Z_4 = 0.$$

Este interesant de observat că unele dintre componente sînt proporţionale cu Q.

95. 1) Eliberăm bila de legături şi atunci ea rămîne liberă sau acţiunea forţelor:

$\vec{P}$ (greutatea proprie)

$\vec{N}$ (reacţiunea sferei) şi

$\vec{T}$ (tensiunea din firul AB). Fie BA' normala la sferă şi planul tangent la sferă în B, cu BB' tangenta la sferă în punctul B.

La echilibru considerăm forţele $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{P}$ situate în planul de secţiune dus prin sfera dată şi punctele O, A, B.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

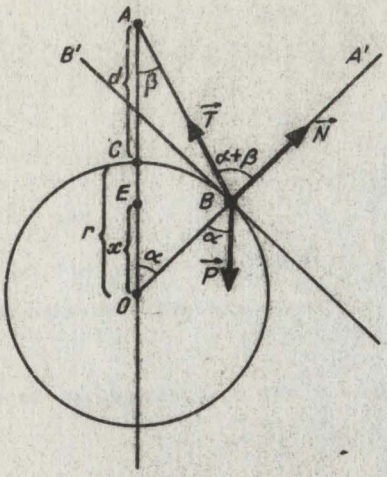


Fig.2.122.

Proiectînd $\vec{T}+\vec{N}+\vec{P} = \vec{0}$ pe BA' și BB', găsim

$T\cos(\alpha+\beta) + N = P\cos\alpha$ și

$T\sin(\alpha+\beta) = P\sin\alpha$. Dar

$(d+r)^2 = l^2 + r^2 + 2lr\cdot\cos(\alpha+\beta)$

și $l^2 = (d+r)^2 + r^2 - 2r(d+r)\cos\alpha$.

Rezultă: $T = \frac{Pl}{d+r}$ și

$N = \frac{Pr}{d+r}$.

2) Pentru a găsi raportul cerut, vom scrie că punctul D sub acțiunea lui $\vec{G}$, $\vec{P}$ și $\vec{Q}$ este în echilibru, ca în figura alăturată (vedeți figura 2.123).

Condiția necesară și suficientă pentru echilibru este $\vec{R} = \vec{G} + \vec{P} + \vec{Q} = \vec{0}$ i.e. $R_x = 0$ și $R_y = 0$. Deci (vedeți figura 2.124):

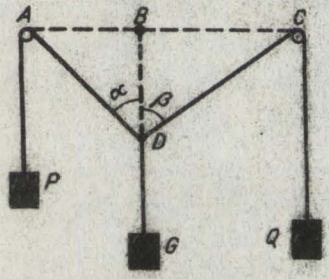


Fig.2.123.

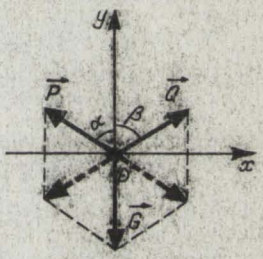


Fig.2.124.

$$\begin{cases} R_x = Q\cdot\sin\beta - P\cdot\sin\alpha = 0 \\ R_y = Q\cdot\cos\beta + P\cdot\cos\alpha - G = 0 \end{cases}$$

Pe de altă parte avem $AB = BD\cdot tg\alpha$ și $BC = BD\cdot tg\beta$.

Astfel noi trebuie să estimăm raportul $\frac{AB}{BC} = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Din $\begin{cases} Q\cdot\sin\beta = P\cdot\sin\alpha \\ Q\cdot\cos\beta = G - P\cdot\cos\alpha \end{cases}$ deducem prin ridicare la pătrat și adunare $\cos\alpha = \frac{G^2+P^2-Q^2}{2PG}$

și analog $\cos\beta = \frac{G^2+Q^2-P^2}{2QG}$; se calculează apoi $\operatorname{tg}\alpha$ și $\operatorname{tg}\beta$ și se găsește:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{G^2+Q^2-P^2}{G^2+P^2-Q^2}.$$

96. 1) Eliberăm punctul de legături și luăm în considerare forțele $\vec{F}$, $\vec{N}$ și $m\vec{g}$. Pentru echilibru, necesar și suficient este ca să avem:

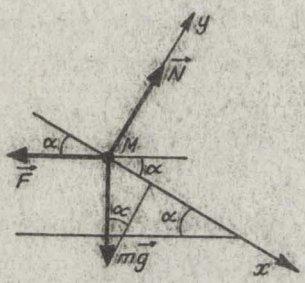


Fig.2.125.

$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{O}$ sau în proiecții pe Mx și My (vedeți figura 2.125):

$F\cos\alpha = G\sin\alpha$,

$N = F\sin\alpha + G\cos\alpha$.

De aici rezultă $F = G\cdot\operatorname{tg}\alpha$ și $N = \frac{G}{\cos\alpha}$.

Astfel poziția de echilibru a lui M apare nedeterminată, fiindcă nu depinde de coordonatele punctului M. Înseamnă că, dacă $F = G\operatorname{tg}\alpha$, punctul M stă în repaus în orice loc de pe planul înclinat.

2) Eliberăm punctul de legături și pentru forțele $\vec{F}$, $\vec{N}$ și $\vec{G}$ scriem condițiile necesare și suficiente de echilibru

$$\vec{N} + \vec{F} + \vec{G} = \vec{O}. \qquad (1)$$

În cazul nostru versorul lui $\vec{N}$ este $\vec{v}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$,

$\vec{F} = \lambda(a-x)\vec{i} - \lambda y\vec{j} - \lambda z\vec{k}$ și $\vec{G} = (0, 0, -mg)$.

Relația (1), proiectată pe axe, ne conduce la (fig.2.126.)

$$\lambda a - \lambda x + N\cdot\frac{x}{a} = 0; \quad -\lambda y + \frac{Ny}{a} = 0; \quad -\lambda z + \frac{Nz}{a} - mg = 0.$$

De aici rezultă $y = 0$; $x = \frac{-\lambda a}{\frac{N}{a}-\lambda}$, $z = \frac{mg}{\frac{N}{a}-\lambda}$, $N \neq \lambda a$. Valoarea lui N rezultă din ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Cazul $N = \lambda a$ nu convine.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

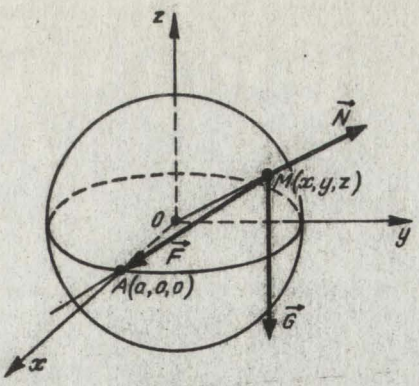


Fig.2.126.

Deci pentru poziţia de echilibru avem

$x = \frac{-\lambda a}{\frac{N}{a} - \lambda}$, $y = 0$, $z = \frac{mg}{\frac{N}{a} - \lambda}$, cu observaţia $xz < 0$, ceea ce conduce la două poziţii de echilibru una cu $x < 0$ şi $z > 0$, alta cu $x > 0$ şi $z < 0$.

97. 1) Introducem forţa de legătură $\bar{R}$. Cele trei forţe $\bar{P}$, $\bar{F}$ şi $\bar{R}$ care acţionează asupra punctului M trebuie să aibă torsorul nul.

Proiectăm relaţia vectorială $\bar{P} + \bar{F} + \bar{R} = \bar{0}$ pe tangenta şi normala în M la cercul (C) şi găsim:

(1) $P \cdot \cos\theta + F \sin\theta = R$; $P \cdot \sin\theta =$

$= F \cdot \cos\theta$ (2); acum

(2) $\longrightarrow P \cdot \sin\theta = k \cdot r \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \Rightarrow \sin\theta = 0 \rightarrow$

$\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ şi $\cos\theta_3 = \frac{P}{kr} \leq 1$.

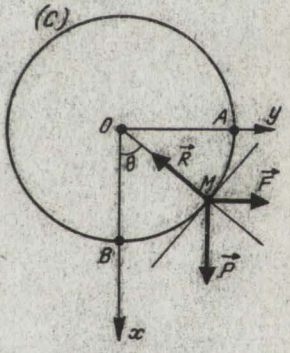


Fig.2.127.

Cu aceste valori, din relaţia (1) găsim modulul reacţiunii $\bar{R}$:

$R(\theta_1) = P$; $R(\theta_2) = -P$; $R(\theta_3) = kr$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Eliberăm punctul de legături, introducînd forţa $\vec{N}$, dirijată după normala la elipsă. Pentru echilibru trebuie să avem $\vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$ sau în proiecţii pe Ox şi Oy

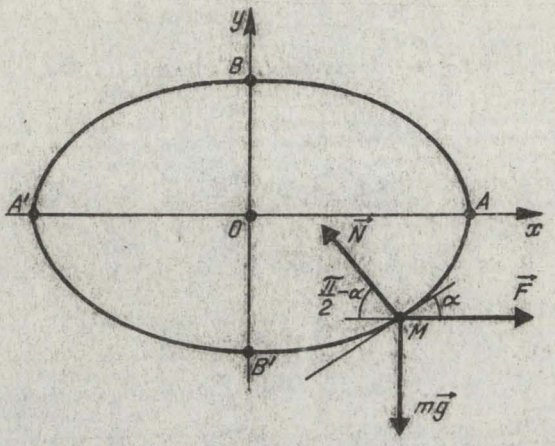


Fig.2.128.

(1) $-N\sin\alpha + F = 0$ şi (2) $N\cos\alpha - mg = 0$, unde $F = \lambda x$. (3)

Unghiul α este determinat de $tg\alpha = y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$. (4)

Din (1), (2) şi (3) deducem $tg\alpha = \frac{F}{G} = \frac{\lambda x}{G}$ (5), iar din (4) şi (5) cele 4 poziţii de echilibru:

i) $x = 0$, $y = b$; ii) $x = \frac{1}{a\lambda}\cdot\sqrt{a^4\lambda^2 - b^2G^2}$, $y = -\frac{b^2G}{a^2\lambda}$;

iii) $x = 0$, $y = -b$; iv) $x = -\frac{1}{a\lambda}\cdot\sqrt{a^4\lambda^2 - b^2G^2}$; $y = \frac{b^2G}{a^2\lambda}$;

$N = mg$; $N = \sqrt{\lambda^2x^2 + m^2g^2}$.

3) <u>Determinarea ecuaţiei curbei</u>. Eliberăm punctul de legături, introducînd reacţiunea $\vec{R}$, dirijată către concavitatea curbei (fig.2.129.)

Fie $OM = r$ şi $\widehat{xOM} = \theta$.

Avem succesiv:

$\vec{F}_1 = kr\cdot\frac{\vec{r}}{r} = k\vec{r}$;

$\vec{F}_2 = -F_2\frac{d\vec{r}}{ds}$, unde versorul tangentei $\vec{\tau}$ la curbă

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

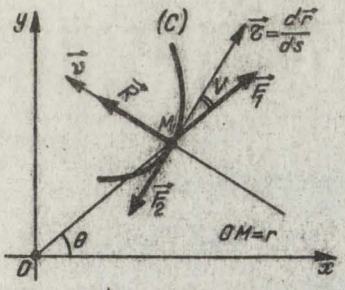


Fig.2.129.

$\frac{d\vec{r}}{ds}$ are componentele $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$, iar versorul normal la curbă, $\vec{\nu}$, are componentele $(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds})$.

Condiția necesară și suficientă (C.n.s.) de echilibru a punctului M este:

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} = \vec{0}$ sau, proiectată pe axele $M\vec{\tau}$ și $M\vec{\nu}$,

$$-F_2 + \vec{F}_1 \cdot \vec{\tau} = 0; \quad R + \vec{F}_1 \cdot \vec{\nu} = 0.$$

Prima relație scalară ne dă: $F_2 = k\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}$, care (cu ajutorul relației $x^2 + y^2 = r^2$, respectiv $xdx + ydx = rdr$) se mai scrie $F_2 = k \cdot rdr/ds$, sau (1) $ds = \frac{rdr}{a}$, cu $a = \frac{F_2}{k}$ = constant.

Dar $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$, așa că (1) se mai scrie

(2) $$d\theta = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} \cdot dr$$ (am luat semnul + în fața radicalului).

Cu schimbarea de variabilă $\frac{r^2}{a^2} - 1 = u^2$, ecuația diferențială (2) devine

(3) $$d\theta = \frac{u^2}{u^2+1} \cdot du$$

cu soluția generală $\theta = u - \text{arctg } u + C_1$. (4)

Acum cu $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ și θ dat de (4) obținem ecuațiile parametrice ale curbei căutate:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\left[\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} - \text{arctg}\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} + C_1\right] \\ y = r\cdot\sin\left[\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} - \text{arctg}\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} + C_1\right] \end{cases} \quad r = \text{parametru.}$$

Calculul reacțiunii.

Fie $V = \sphericalangle(\vec{\rho} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{OM}}{OM}, \vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds})$. Se știe că $\text{tg } V = \frac{r}{r'} = \frac{rd\theta}{dr}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Atunci $\cos V = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2V}} = \frac{dr}{\sqrt{dr^2+r^2 \cdot d\theta^2}} = \frac{dr}{ds}$.

Analog găsim $\sin V = \frac{r d\theta}{ds}$.

Fie $\vec{\rho} = \frac{\vec{r}}{r}$ și $\vec{\varepsilon}$ un versor perpendicular pe $\vec{\rho}$.

Descompunerea versorul tangentei $\vec{\tau}$ după $\vec{\rho}$ și $\vec{\varepsilon}$;

$$\vec{\tau} = \cos V \cdot \vec{\rho} + \sin V \cdot \vec{\varepsilon} = \frac{dr}{ds} \cdot \vec{\rho} + \frac{r d\theta}{ds} \cdot \vec{\varepsilon}.$$

Să descompunem și versorul $\vec{\nu}$ după $\vec{\rho}$ și $\vec{\varepsilon}$. Avem

$\nu_\rho = \cos(V + \frac{\pi}{2}) = -\sin V = -r\frac{d\theta}{ds}$ și $\nu_\varepsilon = \sin(V + \frac{\pi}{2}) = \cos V = \frac{dr}{ds}$.

Deci reacțiunea curbei va avea modulul:

$$R = -\vec{F}_1 \cdot \vec{\nu} = -kr\vec{\rho}(-\frac{r d\theta}{ds}\vec{\rho} + \frac{dr}{ds}\vec{\varepsilon}) = kr^2 \cdot \frac{d\theta}{ds}.$$

Din $ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2$ deducem $r^2 \cdot \frac{d\theta}{ds} = \sqrt{r^2-a^2}$ și sub formă finală $R = k\sqrt{r^2-a^2}$.

98. 1) Eliberăm punctul de legăturile la care e supus, introducînd forțele de legătură $\vec{R}$ și de frecare $\vec{\phi}$, pentru a considera punctul A ca punct liber. Apoi scriem condițiile de echilibru în proiecții pe tangenta în A (la cercul de secțiune din figură) și pe normala în A; obținem

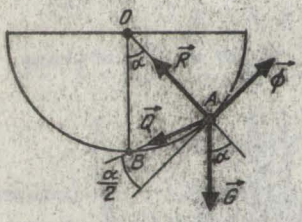


Fig.2.13e.

$$\begin{cases} Q\cos\frac{\alpha}{2} + G\sin\alpha = \phi \\ R = G\cos\alpha - Q\sin\frac{\alpha}{2} \\ \phi = \mu R \end{cases}$$

Folosind aceste relații, între care eliminăm pe R și ϕ, găsim

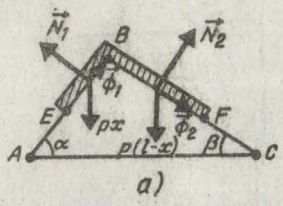
$$Q = \frac{G\sin(\varphi-\alpha)}{\cos(\varphi-\frac{\alpha}{2})} \qquad (1)$$

Deci, în condițiile din enunț, punctul A poate fi acționat de o forță Q, care are modulul dat de (1), și care forță nu modifică echilibrul lui A.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Introducem forţele de legătură şi de frecare (vedeţi figura 2.131 a)) $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{\phi}_1$ şi $\vec{\phi}_2$ şi, mai întîi, presupunem că lanţul ar avea tendinţa să se mişte spre stînga (vedeţi figura 2.131 b)).

Observăm apoi că:



$$\phi_1 = \mu(px\cdot\cos\alpha) = px\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi$$

$$\phi_2 = \mu(l-x)\cdot p\cos\beta = (l-x)p\cdot\operatorname{tg}\varphi\cos\beta;$$

acum condiţia care exprimă tendinţa de mişcare spre stînga se poate scrie (figura 2.131.b)):

$$px\cdot\sin\alpha \geq px\cdot\cos\alpha\operatorname{tg}\varphi + (l-x)p\sin\beta +$$

$$+ (l-x)p\cdot\cos\beta\cdot\operatorname{tg}\varphi,$$

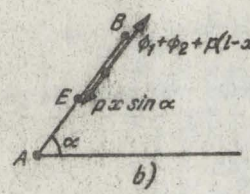


Fig.2.131.

din care deducem

$$x \geq \frac{l}{1+\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta+\varphi)}} \qquad (1)$$

Punînd şi condiţia care exprimă tendinţa de mişcare a lanţului spre dreapta, găsim

$$x \leq \frac{l}{1+\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}} \qquad (2)$$

Relaţiile (1) şi (2) ne dau dubla inegalitate verificată de x pentru poziţia de echilibru:

$$\frac{l}{1+\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta+\varphi)}} \leq x \leq \frac{l}{1+\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}}.$$

3) Fie $x^2+y^2+z^2-a^2=0$ ecuaţia suprafeţei sferice, (x,y,z) coordonatele punctului greu M care se găseşte pe sfera aspră şi φ unghiul de frecare. Versorul normalei în M la sferă este $(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a})$. O condiţie necesară şi suficientă ca punctul M să fie în echilibru pe sfera aspră este ca suportul rezultantei forţelor efectiv aplicate punctului material să facă cu normala un unghi $\alpha \leq \varphi$ (unghiul

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

de frecare). În cazul de față forțele efectiv aplicate sînt reprezentate de $\vec{G}(0,0,-G)$. Deci

$$\alpha \leq \varphi \Rightarrow |\cos\alpha| \geq \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \mu .$$

Dar $\cos\alpha = \frac{\vec{G}\cdot\vec{\nu}}{G} = -\frac{z}{a}$, astfel că relația precedentă devine

$$\left|\frac{z}{a}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} z \geq \dfrac{a}{\sqrt{1+\mu^2}} \\ z > 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} z \leq -\dfrac{a}{\sqrt{1+\mu^2}} \\ z < 0 \end{cases}$$

Prima condiție $z>0$, $z \geq \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$ ne dă echilibru pentru punctele de pe sferă, situate deasupra planului de cotă $z = \frac{a}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Altă situație de echilibru corespunde punctelor de pe caleta inferioară decupată de planul de cotă

$$z = -\frac{a}{\sqrt{1+\mu^2}} .$$

4) Fie $M(x,y,z)$ punctul greu în echilibru pe elicea circulară aspră, φ unghiul de frecare (definit de $\mu = \operatorname{tg}\varphi$), $\vec{R}$ rezultanta forțelor exterioare aplicate și $\beta = \sphericalangle(\vec{R},\vec{\tau})$ unde $\vec{\tau} = \left(\frac{-a\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ este versorul tangentei în M la elice.

Condiția necesară și suficientă (C.n.s.) ca punctul M să se afle în echilibru este ca $\beta = \sphericalangle(\vec{R},\vec{\tau}) \geq \frac{\pi}{2} - \varphi$ (φ unghiul de frecare). Rezultă $\cos\beta \leq \sin\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

In cazul nostru avem $\vec{G} = (0,0,-G) = \vec{R}$, iar

$$\vec{\tau} = \left(\frac{-a\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Deci $\left|\cos\beta\right| = \left|\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$ sau

$$b^2 + b^2\mu^2 \leq \mu^2 \cdot a^2 + \mu^2 b^2 \text{ sau } b \leq a\mu. \qquad (1)$$

Astfel relaţia (1) reprezintă condiţia cerută.

5) Eliberăm scara de legături prin introducerea forţelor de legătură (Z,O) şi (X,Y) în A şi B şi scriem condiţiile necesare şi suficiente de echilibru (ecuaţiile de proiecţii şi momente faţă de O): $Z = X$, $G = Y$, $X = \mu G$ şi $Z\ell\cos\alpha_0 + G\frac{\ell}{2}\sin\alpha_0 = Y\ell\sin\alpha_0$ sau $\mu G\cos\alpha_0 + \frac{G}{2}\sin\alpha_0 = G\sin\alpha_0$ sau $\operatorname{tg}\alpha_0 = 2\mu$

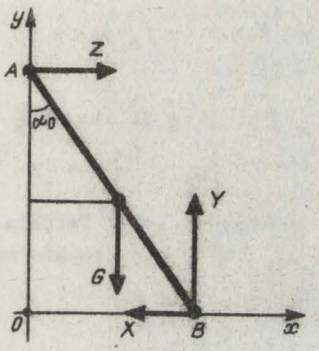


Fig.2.132

Pentru $\alpha > \alpha_0$, echilibrul se strică. Scara cade. Deci $\alpha \leq \alpha_0$.

6) Eliberăm bara de legături, introducînd reacţiunile cercului $\vec{N}_A$ şi $\vec{N}_B$ asupra barei şi forţele de frecare $\vec{\phi}_A$ şi $\vec{\phi}_B$ tangente la cerc în A şi B, cu sensurile din figură, deoarece am considerat că bara AB ar avea o tendinţă de mişcare în sens trigonometric (vedeţi figura 2.133.).

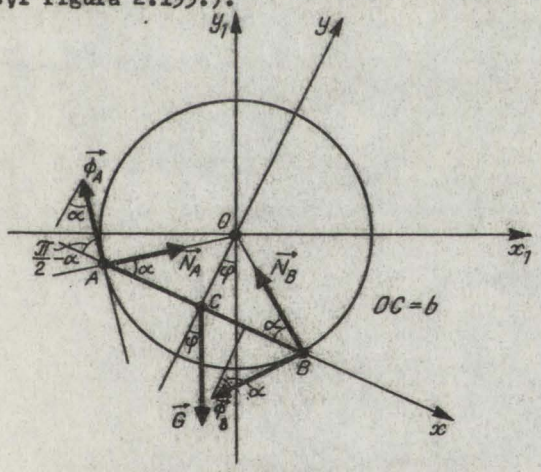


Fig.2.133.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Fie μ coeficientul de frecare între bară şi ghidaj. Condiţia necesară şi suficientă de echilibru este $\mathcal{E}_o = 0$, adică:

$$\vec{\phi}_A + \vec{N}_A + \vec{G} + \vec{\phi}_B + \vec{N}_B = \vec{0} \quad \text{şi} \quad \vec{M}_o = \vec{0}.$$

Aceste condiţii vectoriale proiectate pe axele Cx şi Cy ne conduc la ecuaţiile scalare:

Proiecţia pe Cx: $-\phi_A \sin\alpha + N_A \cos\alpha + G \sin\varphi - N_B \cos\alpha - \phi_B \sin\alpha = 0.$

Proiecţia pe Cy: $\phi_A \cos\alpha + N_A \sin\alpha - G\cos\varphi + N_B \sin\alpha - \phi_B \cos\alpha = 0.$

Ecuaţia de momente: $r\phi_A - Gb\sin\varphi + r\phi_B = 0.$

La acestea mai adăugăm $\phi_A = \mu N_A$, $\phi_B = \mu N_B$ şi $\sin\alpha = \frac{b}{r}$.

Din aceste relaţii se deduce $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{b^2}{r^2} \cdot \frac{1+\mu^2}{\mu} - \mu$.

7) Eliberăm corpul de legături şi figurăm toate forţele care-l acţionează. Condiţiile de echilibru sînt

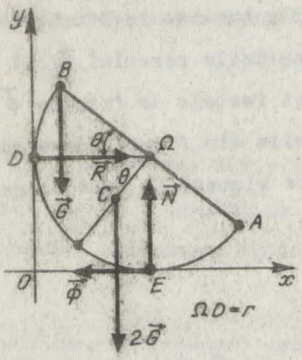


Fig.2.134.

1) $\vec{R} + \vec{G} + 2\vec{G} + \vec{\phi} + \vec{N} = \vec{0}.$

2) $\vec{M}_\Omega = \vec{0}.$

Acestea proiectate pe axele de coordonate ne dau:

1) $R - \phi = 0$, $\phi = \mu N = \frac{5}{12} N$;

2) $N = 3G$;

3) $G \cdot r \cdot \cos\theta - \phi r + 2 \cdot G \cdot \frac{3r}{8} \sin\theta = 0,$

respectiv: $N = 3G$; $\phi = \frac{5}{4} G$,

$\cos\theta + \frac{3}{4} \sin\theta = \frac{5}{4}$ şi $R = \phi$

Rezolvînd ecuaţia trigonometrică, obţinem $\theta \simeq 36^\circ 52'$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

PARTEA A II-A

CINEMATICA

CAPITOLUL III

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

§ 3.1. Analiza vectorială

3.1.1. Rezumat teoretic

1. Fie $\bar{w}(t) = w_x(t)\bar{i} + w_y(t)\bar{j} + w_z(t)\bar{k}$ o funcție vectorială derivabilă $\bar{w}(.) : [0, T] \longrightarrow R^3$; atunci

$$\dot{\bar{w}}(t) := \frac{d\bar{w}(t)}{dt} = \dot{w}_x(t)\bar{i} + \dot{w}_y(t)\bar{j} + \dot{w}_z(t)\bar{k}$$

Derivatele de ordin superior ale lui $\bar{w}(t)$ se definesc analog.

2. Proprietăți ale operației de derivare:

a) $\frac{d}{dt}(\bar{a}(t) + \bar{b}(t)) = \dot{\bar{a}}(t) + \dot{\bar{b}}(t)$

b) $\frac{d}{dt}(m(t).\bar{a}(t)) = \dot{m}(t)\bar{a}(t) + m(t)\,\dot{\bar{a}}(t)$

c) $\frac{d}{dt}(\bar{a}(t).\bar{b}(t)) = \dot{\bar{a}}(t)\bar{b}(t) + \bar{a}(t).\dot{\bar{b}}(t)$

d) $\frac{d}{dt}(\bar{a}(t) \times \bar{b}(t)) = \dot{\bar{a}}(t) \times \bar{b}(t) + \bar{a}(t) \times \dot{\bar{b}}(t)$

e) $\frac{d}{dt}(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (\dot{\bar{a}},\bar{b},\bar{c}) + (\bar{a},\dot{\bar{b}},\bar{c}) + (\bar{a},\bar{b},\dot{\bar{c}})$

3. Derivata unui vector derivabil $\bar{a}(t)$ de modul constant a și direcția variabilă este un vector perpendicular pe $\bar{a}(t)$:

$\dot{\bar{a}}(t) = a\,\dot{\theta}(t)\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}$ versor perpendicular pe $\bar{a}(t)$.

4. Derivata unui vector $\bar{a}(t)$ de direcție fixă și de modul variabil a(t) este un vector coliniar cu $\bar{a}(t)$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3.1.2. Probleme

99. 1) Fie $\vec{a}(t)$ și $\vec{b}(t)$ doi vectori de n ori derivabili pe un interval temporal I. Atunci, pe acest interval, avem

$$(\vec{a}(t) + \vec{b}(t))^{(n)} = (\vec{a}(t))^{(n)} + (\vec{b}(t))^{(n)}$$

2) Să se stabilească forma intrinsecă a derivatei unui versor $\vec{u}(t)$, $\vec{u}(.):I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \in C^1(I)$, folosind derivata modulului unui versor de clasă $C^1(I)$.

3) Dacă $\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}$, unde $\vec{u}$ e un versor constant în mărime și direcție, iar v(t) este modulul vectorului $\vec{v}(t)$, definit pe I, derivabil, atunci derivata $\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ este un vector paralel cu $\vec{u}$ și recipro...

100. 1) Fie $\lambda(.):I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $\vec{e}$ un vector constant din V. Dacă:

$$\forall t \in I, \quad \text{avem } \dot{\vec{r}}(t) = \lambda(t)\vec{e}, \qquad (1)$$

atunci traiectoria descrisă de vîrful lui $\vec{r}(t)$ este o dreaptă.

Cazuri particulare $\lambda(t) = 0, t, t^2$, a.

2) Un punct material P se mișcă astfel încît derivata vectorului viteză este nulă. Caracterizați mișcarea lui P.

3) Să se determine vectorul $\vec{w}(t)$, $\vec{w}(.):I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clasă $C^1(I)$, care verifică ecuația diferențială

$$a\dot{\vec{w}}(t) = \vec{w}(t), \quad a \in \mathbb{R}^*$$

101. 1) Determinați vectorii $\vec{w}(t) \in C^2(I)$ pentru care avem

$$\ddot{\vec{w}}(t) \times \vec{w}(t) = \vec{0}, \quad \forall t \in I.$$

2) Să se determine vectorul $\vec{w}(t) \in C^2(I)$, care verifică ec

$$3\ddot{\vec{w}}(t) - \dot{\vec{w}}(t) - 2\vec{w}(t) = \vec{0}$$

și condițiile Cauchy: $\vec{w}(0) = \vec{a}$ și $\dot{\vec{w}}(0) = \vec{b}$.

3) Vîrfurile a trei vectori concurenți $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $\vec{r}_3(t)$, $\vec{r}_1(.)$, $\vec{r}_2(.)$, $\vec{r}_3(.)$: I $\longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clasă $C^1(I)$, definesc un triunghi $A_1A_2A_3$. Dacă punctele $A_1(\vec{r}_1)$, $A_2(\vec{r}_2)$ și $A_3(\vec{r}_3)$ descriu curbe pe care

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

vitezele lor sînt paralele cu vectorii $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_1}$ și $\overrightarrow{A_1A_2}$, atunci aria triunghiului $A_1A_2A_3$ are o valoare constantă.

3.1.3. Rezolvarea problemelor

99) 1) Se folosește inducția matematică după $n \in \mathbb{N}$.

2) Stabilim mai întîi formula care dă derivata modulului unui vector derivabil. În acest scop pornim de la $v(t) = \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)}$ și găsim:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt}}{v} \quad \text{sau} \quad \dot{v} = \frac{\vec{v}\dot{\vec{v}}}{v} \tag{1}$$

Fie acum $\vec{u}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}$ un versor de clasă C^1. Avem succesiv

$$\dot{\vec{u}} = \frac{\dot{\vec{v}}v - \vec{v}\dot{v}}{v^2} = \frac{\dot{\vec{v}}v - \vec{v}\left(\frac{\vec{v}\dot{\vec{v}}}{v}\right)}{v^2} =$$

$$= \frac{\dot{\vec{v}}(\vec{v},\vec{v}) - \vec{v}(\vec{v},\dot{\vec{v}})}{v^3} = \frac{\vec{v} \times (\dot{\vec{v}} \times \vec{v})}{v^3}.$$

Această ultimă expresie se numește forma intrinsecă a derivatei unui versor $\vec{u}(t)$.

3) Fie deci $\vec{u} = \overline{\text{constant}}$ (ca mărime și direcție). Atunci $\dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{u}$ și deci $\dot{\vec{v}}$ e coliniar cu $\vec{u}$, i.e. $\dot{\vec{v}} \parallel \vec{u}$.

Reciproc, fie $\dot{\vec{v}}$ coliniar cu $\vec{u}$. Dar $\dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{u} + v\dot{\vec{u}}$. Cum $\dot{\vec{v}}$ e coliniar cu $\vec{u}$, vom avea $\dot{\vec{v}} \times \vec{u} = \vec{0}$, relație care ne dă $(\dot{v}\vec{u} + v\dot{\vec{u}}) \times \vec{u} = \vec{0}$ sau $v\dot{\vec{u}} \times \vec{u} = \vec{0}$ sau (1) $\dot{\vec{u}} \times \vec{u} = \vec{0}$ sau $\dot{\vec{u}} = \vec{0}$, adică $\vec{u} = \overline{\text{constant}}$. Relația (1) ar mai avea loc și atunci cînd $\dot{\vec{u}} = \lambda\vec{u}$, dar $\vec{u}$ fiind versor avem $\dot{\vec{u}} \perp \vec{u}$ și $\dot{\vec{u}}$ nu poate fi și coliniar cu $\vec{u}$ și perpendicular pe $\vec{u}$.

Lec. 1) Funcția $\lambda(t)$ fiind continuă pe I, ea admite primitive pe I. Deci

$$\vec{r}(t) = \Lambda(t)\vec{a} + \vec{d}, \tag{2}$$

unde $\Lambda(t)$ e o primitivă a lui $\lambda(t)$ pe I.

Relația vectorială (2) se mai scrie "pe coordonate":

$$x = \Lambda a_1 + d_1, \quad y = \Lambda a_2 + d_2, \quad z = \Lambda a_3 + d_3 \quad \text{sau}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\frac{x-d_1}{c_1} = \frac{y-d_2}{c_2} = \frac{z-d_3}{c_3} \quad (= A(t)),$$

ceea ce ne arată că vîrful lui $\bar{r}$ descrie o dreaptă ce trece prin punctul (d_1,d_2,d_3) și are parametrii directori (c_1,c_2,c_3). (Am notat proiecțiile vectorilor $\bar{c}$ și $\bar{d}$ pe axe cu c_1,c_2,c_3 și d_1,d_2,d_3).

În cazurile particulare considerate, evident, A(t) trebuie înlocuit cu kt, $\frac{t^2}{2}$, $\frac{t^3}{3}$, at, $A, a \in \mathbb{R}$.

2) Fie $\bar{v}(t) = a(t)\bar{u}(t)$, $\bar{u} = vers\,\bar{v}$, expresia vitezei punctului P. Prin derivare după t găsim

$$(1) \qquad \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{da}{dt}\bar{u} + a\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{0}.$$

Pentru vectorul $\bar{u}(t)$ am obținut o ecuație diferențială vectorială de primul ordin. Fie $a \neq 0$. Aceasta ne permite să scriem ed(1) sub forma

$$(2) \qquad \frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{a'}{a} \cdot \bar{u} = 0$$

Ecuația (2) "pe componente" se scrie

$$\frac{du_1}{dt} + \frac{a'}{a}u_1 = 0; \quad \frac{du_2}{dt} + \frac{a'}{a}u_2 = 0; \quad \frac{du_3}{dt} + \frac{a'}{a}u_3 = 0.$$

Fiecare dintre acestea e o ecuație diferențială scalară liniară; ele au următoarele soluții generale:

$$u_1(t) = C_1\frac{1}{a(t)}, \quad u_2(t) = C_2\frac{1}{a(t)}, \quad u_3(t) = C_3\frac{1}{a(t)}$$

Deci $\bar{u}(t) = \frac{1}{a(t)}(C_1\bar{I} + C_2\bar{J} + C_3\bar{K}) = \frac{\bar{C}}{a(t)}$, iar

$\bar{v}(t) = a(t).\bar{u}(t) = \bar{C}, \quad \forall\, t \in I = [0,T]$. Rezultă că mișcarea e rectilinie și uniformă.

3) Ori proiectăm ecuația pe axe, ori, mai simplu, căutăm direct soluții de forma (1) $\bar{w}(t) = \bar{C}e^{\alpha t}$. Din (1) deducem $\dot{\bar{w}}(t) = \bar{C}\alpha e^{\alpha t}$. Înlocuim apoi în ecuația dată și funcția și derivata ei și găsim $\bar{C}(a\alpha - 1) = 0$; rezultă $\alpha = \frac{1}{a}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Deci $\vec{w}(t) = \vec{C}\, e^{\frac{t}{a}}$, $\vec{C}$ un vector constant arbitrar din V.

lel. 1) Egalitatea din enunț ne spune că $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, a.î. $\vec{w}'' = \lambda \vec{w}$.

Cazul 1) $\lambda < 0$, $\lambda = -\omega^2$; $\vec{w}(t) = \vec{C}_1 \cos \omega t + \vec{C}_2 \sin \omega t$

Cazul 2) $\lambda = 0$, $\vec{w}(t) = \vec{C}_3 t + \vec{C}_4$

Cazul 3) $\lambda > 0$, $\lambda = \omega^2$; $\vec{w}(t) = \vec{C}_5 e^{-\omega t} + \vec{C}_6 e^{\omega t}$.

Ca și în exercițiul precedent, pentru fiecare caz în parte am căutat soluții de forma $\vec{w}(t) = \vec{C} e^{\alpha t}$, $\vec{C} \in V$, $\vec{C} \neq \vec{0}$, și $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Căutăm soluții de forma $\vec{w}(t) = \vec{C}\, e^{\alpha t}$; $\vec{w}' = \alpha \vec{w}(t)$, $\vec{w}'' = \alpha^2 \vec{w}$.

Înlocuim în ecuație și obținem

$$(3\alpha^2 - \alpha - 2)\vec{C} = \vec{0};$$

rezultă $3\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ cu $\alpha = 1$ și $\alpha = -\frac{2}{3}$.

Avem astfel $\vec{w}_1 = \vec{C}_1 e^t$; $\vec{w}_2 = \vec{C}_2\, e^{-\frac{2}{3}t}$ și de asemenea

$$\vec{w}(t) = \vec{C}_1 e^t + \vec{C}_2\, e^{-\frac{2}{3}\cdot t}$$

respectiv

$$\vec{w}'(t) = \vec{C}_1\, e^t - \frac{2}{3}\vec{C}_2\, e^{-\frac{2}{3}\cdot t}$$

Din condițiile inițiale date deducem următorul sistem cu $\vec{C}_1$ și $\vec{C}_2$ drept necunoscute:

$$\vec{C}_1 + \vec{C}_2 = \vec{a}$$

$$\vec{C}_1 - \frac{2}{3}\vec{C}_2 = \vec{b}.$$

Acest sistem are soluția $\vec{C}_2 = 3\,\frac{(\vec{a}-\vec{b})}{5}$ și $\vec{C}_1 = \frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$.

Acum scriem pe w(t) căutată

$$\vec{w}(t) = \frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5} \cdot e^t + \frac{3\vec{a}-3\vec{b}}{5}\, e^{-\frac{2}{3}\cdot t}$$

3) Scriem vectorul - arie a $\triangle A_1A_2A_3$ astfel:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_2(t) \times \vec{r}_3(t) + \vec{r}_3(t) \times \vec{r}_1(t)).$$

Derivăm pe $\vec{S}$ și ținem seama de faptul că

$$\dot{\vec{r}}_1(t) = \lambda_1 \overrightarrow{A_2A_3} = \lambda_1(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \text{ etc. Rezultă } \dot{\vec{S}} = \vec{0}.$$

Deci $\vec{S} = \overrightarrow{\text{constant}}$.

§.3.2. Mișcări rectilinii

3.2.1. Rezumat teoretic

1. Într-o mișcare rectilinie a unui punct material P, pe dreapta (d) pentru care $x = s(t)$, $s(.):I \longrightarrow R$, $s \in C^2$ (I), viteza și accelerația punctului se calculează cu formulele:

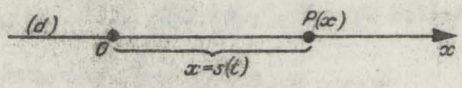


Fig.3.1.

$$v(t) = \dot{s}(t);$$
$$a(t) = \ddot{s}(t).$$

2. Într-o mișcare rectilinie și uniformă a unui punct material P avem $v(t) = v_0 = \text{constant}$, $a(t) = \dot{v}(t) = 0$ și deci $x = v_0 t + s_0$, unde s_0 este spațiul inițial.

3. Într-o mișcare rectilinie uniform variată a unui punct material P avem: $a = \text{constant}$, deci

$$s(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0, \quad v(t) = v_0 + at,$$

unde s_0 e spațiul inițial, v_0 este viteza inițială și $t \in I$.

Dacă $a > 0$ mișcarea se numește <u>uniform accelerată</u>, iar dacă $a < 0$ mișcarea se zice <u>uniform încetinită</u>.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3.2.2. Probleme

1e2.α) Un punct material P se mişcă pe o dreaptă (d) după legeaz

$$x = C_1 t + C_2 (\cos \omega t - 1), \quad t \in I, \omega, C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Să se determine viteza punctului, acceleraţia lui şi ed care descrie mişcarea.

2) Un punct material P se mişcă pe o dreaptă (d) după legea

$$(1) \qquad s(t) = 2 v^3(t) - 16, \quad t \in I,$$

unde v(t) este viteza lui P, iar s(t) drumul parcurs de acesta.

In cît timp viteza sa devine de 3 ori mai mare decît valoarea ei iniţială, dacă s(0) = 0?

3) α) Un punct material P(x) se mişcă pe axa Ox, abscisa acestuia fiind definită de ecuaţia algebrică:

$$x^2 = At^2 + Bt + C \qquad (1)$$

Cum depinde acceleraţia punctului P de abscisa x?

β) Aceeaşi întrebare pentru cazul în care legea (1) se înlocuieşte cu legea

$$t = Ax^2 + Bx + C. \qquad (2)$$

1e3. 1) Un punct material P(x) se mişcă pe axa Ox, abscisa lui fiind egală cu $x(t) = t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, $\forall t \geq 0$.

Determinaţi <u>cînd</u> punctul se mişcă în sensul pozitiv al axei, Ox, respectiv în sensul contrar şi <u>cînd</u> mişcarea e accelerată, respectiv este întîrziată. Timpul este măsurat în secunde, iar distanţa în metri.

2) Două puncte materiale P_ω şi P_a de mase egale sînt atrase de un centru fix O cu o forţă care le imprimă acceleraţia

$$\gamma = \frac{a}{x^n}, \quad n \in \mathbb{R}, \ a \in \mathbb{R}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Primul punct P_∞ își începe mișcarea din vecinătatea punctului de la infinit al axei Ox, iar cel de al doilea, P_a, din B(a,0) ambele fără viteze inițiale.

Cînd primul punct a ajuns în A'(a,0), iar al doilea în $B'(\frac{a}{4},0)$, atunci ambele puncte au aceeași viteză. Care este valoarea lui n?

Examenul de Capacitate pentru fete și băieți, București, 1972

3) Un punct material P(x) se mișcă astfel încît abscisa sa x(t), $x(.):I \longrightarrow R$, de clasă $C^2(I)$, verifică ed:

$$\ddot{x} = k \sin \frac{x}{a}.$$

Să se afle legea lui de mișcare, știind că x(0) = a și că $\dot{x}(0) = 2\sqrt{ak}$, unde k și a sînt constante fizice date,

1e4. 1) Două mobile M_1 și M_2 se mișcă în linie dreaptă unul către altul.

Primul pleacă din A, cu o mișcare uniformă cu viteza v_1, iar al doilea pleacă din B_0 în același moment cu M_1, către A, și are o mișcare uniform accelerată, cu viteza inițială v_2 și accelerația a. Știind că AB = d, să se afle locul de întîlnire și timpul după care mobilele se întîlnesc.

2) Un corp se mișcă rectiliniu uniform accelerat și străbate două porțiuni de drum rectilinii lungi de S metri, fiecare una după alta.

Corpul străbate prima porțiune în t_1 secunde, iar pe cea de a doua în următoarele t_2 secunde.

Aflați viteza v_0 de la începutul parcurgerii primei porțiuni de drum și accelerația corpului. Care o viteza inițială la începutul parcurgerii celei de a doua porțiuni de drum de lungime S ?

3.2.3. Rezolvarea problemelor

1e2. 1) Avem imediat:

$$v(t): = \dot{x}(t) = C_1 - C_2 \omega \sin \omega t, \qquad (2)$$

$$s(t): = \ddot{x}(t) = - C_2 \omega^2 \cos \omega t. \qquad (3)$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Pentru a găsi ed a mişcării, eliminăm pe C_1 şi C_2 între ecuaţiile (1), (2) şi (3), pe care le scriem astfel:

$$C_1 t + C_2(\cos\omega t - 1) - x = 0$$

$$C_1 - C_2\omega\sin\omega t - \dot{x} = 0$$

$$- C_2\omega^2\cos\omega t - \ddot{x} = 0.$$

Obţinem

$$\begin{vmatrix} x & t & 1 - \cos\omega t \\ \dot{x} & 1 & \omega\sin\omega t \\ \ddot{x} & 0 & \omega^2\cos\omega t \end{vmatrix} = 0$$

sau următoarea ed de ordinul al doilea liniară şi omogenă:

$$(-1 + \cos\omega t + \omega t\sin\omega t)\ddot{x} - \omega^2 t\cos\omega t \cdot \dot{x} + \omega^2\cos\omega t \cdot x = 0$$

2) Derivăm (1) şi găsim $v = 6v^2 \cdot \frac{dv}{dt}$; cu $v \neq 0$, obţinem $dt = 6vdv$, care ne dă $t = 3v^2 + K$ (2)

Cu $s(0) = 0$, din (1) deducem $v(0) = 2$, respectiv din (2) $K = -12$.

Astfel rezultă $t = 3v^2 - 12$. Dacă vrem ca v să fie egal cu $3.v(0) = 6$, obţinem $t = 3.36 - 12 = 96$ secunde. Deci după scurgerea a 96 secunde viteza punctului în cauză se triplează faţă de viteza iniţială $v(0) = 2$.

3)$\mathcal{L}$) Derivînd relaţia (1) găsim $2x\dot{x} = 2At + B$ (3) şi $\dot{x}^2 + x\ddot{x} = A$ (4).

Pentru a determina acceleraţia punctului P în funcţie de spaţiul parcurs x, trebuie să eliminăm pe t şi $\dot{x}$ între ecuaţiile (1), (3) şi (4).

Mai întîi eliminăm pe t între (1) şi (3). În acest scop scriem cele două ecuaţii astfel

$$\begin{cases} At^2 + Bt + C - x^2 = 0 \\ 2At + b - 2x\dot{x} = 0 \end{cases}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

şi construim rezultantul [1] acestor două polinoame, pe care-l egalăm cu zero. Găsim

$$\begin{vmatrix} A & B & C-x^2 \\ 2A & B-2x\dot{x} & 0 \\ 0 & 2A & B-2x\dot{x} \end{vmatrix} = 0$$

sau $4Ax^2\dot{x}^2 - 4A^2x^2 + A(4AC - B^2) = 0.$ (5)

Între relaţia precedentă şi relaţia (4) trebuie să eliminăm pe $\dot{x}$. Din (3) deducem $\dot{x}^2 = A - x\ddot{x}$.

Aceasta înlocuit în (5) ne conduce la

$$\ddot{x} = -\frac{A(B^2-4AC)}{x^3}, \quad x \neq 0$$

β) Procedeu analog. Găsim

$$\ddot{x} = -\frac{1}{4A^2(x-x_0)^3}, \text{ unde } x_0 = -\frac{B}{2A}$$

1e3. 1) Întocmim tabelurile de variaţie pentru $x(t)$, $x'(t) := v(t)$, $x''(t) := a(t)$ şi construim apoi graficele corespunzătoare

t	0		$\frac{1}{3}$		1,61		3		4		$+\infty$
x'(t)	3	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+
x(t)	4	↗	4,5	↘	0	↘	-5	↗	0	↗	$+\infty$

t	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{3}$		3		4		$+\infty$
x''(t)	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+
x'(t)	3	↘	0	↘	-5,3	↗	0	↗	↗	↗	$+\infty$

1) Vedeţi lucrarea "Tabele şi formule matematice" de E.Rogai, Edit. tehnică, Bucureşti, 1983, 1984.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

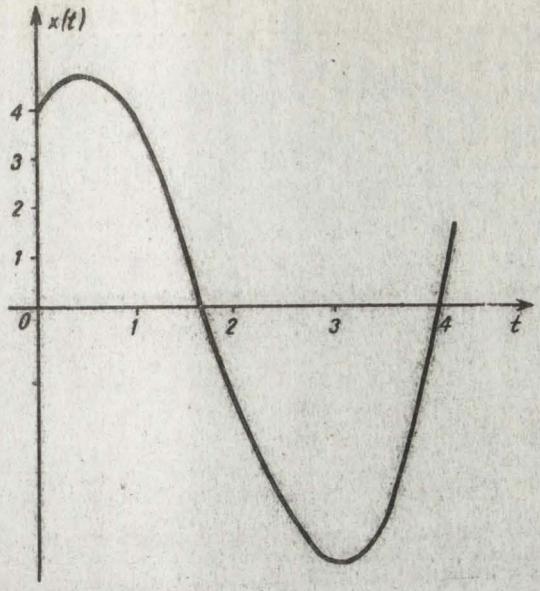


Fig.3.2.

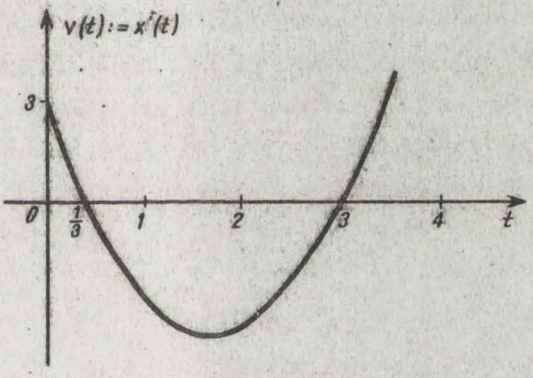


Fig.3.3.

t	0			1,67				$+\infty$
x''(t)	-1.	↗	- ↗	0	↗	+	↗	$+\infty$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

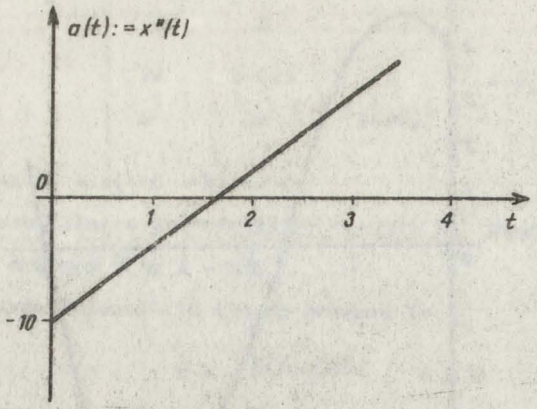


Fig.3.4.

Construim apoi graficele corespunzătoare.

Din tablourile de variaţie ca şi din graficele corespunzătoare pentru x(t), v(t) şi a(t), rezultă următoarele:

La momentul iniţial punctul material porneşte din punctul de abscisă 4 cu $v_0 = 3$ şi a = -le.

Are o mişcare încetinită şi se opreşte o clipă la distanţa de 4,5 faţă de origine la momentul $t = \frac{1}{3}$. Din acest moment viteza îşi schimbă sensul devenind negativă pînă la t = 3, cînd punctul are abscisa -5 şi v = 0. Apoi punctul P porneşte către O, la momentul t = 4 trece prin O şi îşi continuă mişcarea accelerată, x(t) crescînd nemărginit.

In figura de mai jos schiţăm "sui generis" mersul mobilului pe axa Ox:

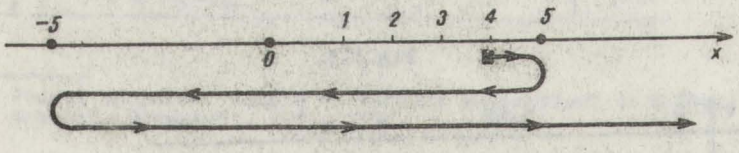


Fig.3.5.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Mişcarea celor două puncte, P_∞ şi P_a, este rectilinie; schiţăm mai jos situaţia acestor puncte la $t = 0$ şi $t > 0$:

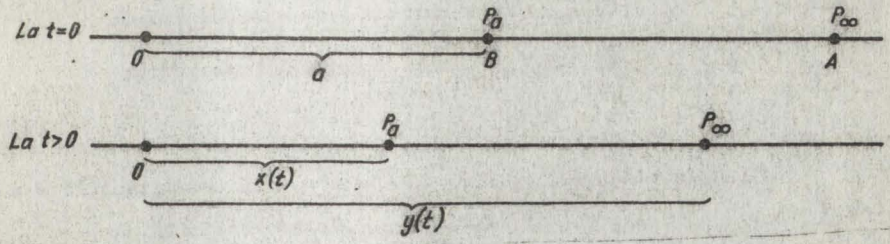


Fig.3.6.

Conform cu enunţul putem scrie:

Pentru P_a

$$\ddot{x} = -\frac{a}{x^n} \quad \Big| \cdot 2\dot{x}$$

$$2\ddot{x}\dot{x} = -\frac{2\dot{x}a}{x^n}$$

$$\dot{x}^2 = 2a\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C_a$$

Pentru P_∞

$$\ddot{y} = -\frac{a}{y^n} \quad \Big| \cdot 2\dot{y}$$

$$2\ddot{y}\dot{y} = -2a\frac{\dot{y}}{y^n}$$

$$\dot{y}^2 = \frac{2a}{n-1} \cdot \frac{1}{y^{n-1}} + C_\infty$$

Pentru a avea $\lim\limits_{y \to +\infty} \dot{y} = 0$, se impune $n > 1$ şi $C_\infty = 0$.

Pentru a avea $\dot{x}(0) = 0$, trebuie să luăm $C_a = \frac{-2a}{(n-1)a^{n-1}}$

Astfel vitezele celor două puncte sînt definite de:

$$\dot{x}^2 = \frac{2a}{n-1}\left[\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right] \text{ şi } \dot{y}^2 = \frac{2a}{n-1} \cdot \frac{1}{y^{n-1}}$$

Dacă scriem că ele, vitezele, sînt egale atunci cînd $y = a$ şi $x = \frac{a}{4}$, găsim

$$\frac{2a}{(n-1)}\left[\frac{4^{n-1}}{a^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right] = \frac{2a}{(n-1)a^{n-1}}, \text{ respectiv } n = \frac{3}{2}, \text{ care e valoa-}$$

rea lui n căutată.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Scriem legea dată $\ddot{x} = k \sin \frac{x}{a}$, o înmulţim cu $2\dot{x}$ şi integrăm

$$2\dot{x}\ddot{x} = k(\sin \tfrac{x}{a}) \cdot 2\dot{x} \Longrightarrow \dot{x}^2 + 2ak \cos \tfrac{x}{a} = C;$$

acum $x(0) = a \in \mathcal{T}$ şi $\dot{x}(0) = 2\sqrt{ak}$ ne permit determinarea lui C:

$4ak - 2ak = C = 2ak$; astfel viteza punctului P se scrie:

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{ak} \cdot \sin \frac{x(t)}{2a}. \qquad (1)$$

Integrînd ed (1) şi folosind încă o dată condiţia $x(0) = a \in \mathcal{T}$, rezultă legea de mişcare a punctului P sub formă implicită

$$\operatorname{tg} \frac{x}{4a} = e^{\sqrt{\frac{k}{a}}\, t}, \quad t \in I.$$

1o4. 1) Legea de mişcare a lui M_1 este: $x(t) = v_1 t$, $t \in I$, iar a lui M_2 $y(t) = \frac{at^2}{2} + v_2 t$, $t \in I$.

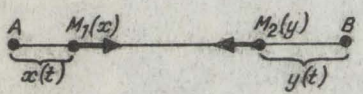


Fig.3.7.

Fie $t_1 \in I$ momentul în care mobilele se întîlnesc.

Atunci avem

$x(t_1) + y(t_1) = d$ sau

$at_1^2 + 2(v_1 + v_2).t_1 - 2a = 0.$

De aici deducem momentul întîlnirii

$$t_1 = (\sqrt{(v_1+v_2)^2 + 2ad} - (v_1+v_2)) : a$$

şi locul întîlnirii $x(t_1) = v_1 t_1$.

2) Legea de mişcare a corpului se scrie

$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$; la momentul t_1 avem $S_1 = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2}$ şi

$v_1 = v_0 + at_1$; apoi la momentul t_2 s devine:

$S_2 = (v_0 + at_1)t_2 + \frac{at_2^2}{2}$. Obţinem astfel ecuaţiile

$$\begin{cases} v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} = S \\ v_0 t_2 + at_1 t_2 + \frac{at_2^2}{2} = S, \end{cases}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

pentru determinarea lui v_0 și a.

De aici deducem

$$v_0 = \frac{s}{t_1} - \frac{at_1}{2} \quad \text{și} \quad a = \frac{2s(t_1-t_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$$

respectiv $v_1 = v_0 + at_1$.

§3.3. Mișcări în plan

3.3.1. Rezumat teoretic

1. Dacă un punct material P se mișcă pe o traiectorie plană de ecuație $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $x(.), y(.): I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x(t), y(t) \in C^2(I)$, atunci viteza lui P și accelerația sa se calculează cu formulele

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$$
$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}.$$

2. Într-o mișcare curbilinie plană în care coordonatele carteziene $x(t)$, $y(t)$ ale punctului material P care se mișcă se pot exprima cu ajutorul coordonatelor polare $r(t)$ și $\theta(t)$ prin formulele

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\theta(t), \\ y(t) = r(t)\sin\theta(t), \end{cases}$$

unde $r(.), \theta(.): I \longrightarrow \mathbb{R}$, $r(t), \theta(t)$ $C^2(I)$, avem

$$\vec{r} = r(t)\vec{\rho}, \vec{\rho} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j};$$
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\vec{\rho} + r\dot{\theta}\vec{\varepsilon}, \vec{\varepsilon} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}; \quad v_\rho = \dot{r}(t), \quad v_\varepsilon = r(t)\dot{\theta}(t);$$
$$\vec{a} = a_\rho \cdot \vec{\rho} + a_\varepsilon \cdot \vec{\varepsilon}; \quad a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\varepsilon = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

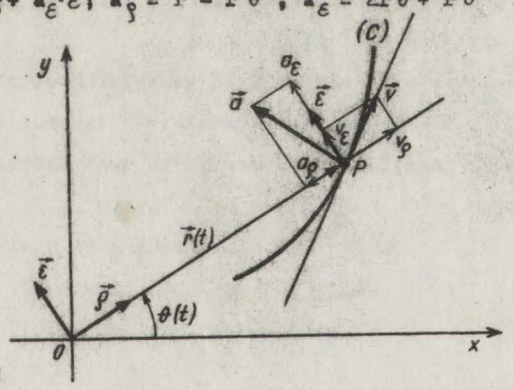


Fig.3.8.

Cda. 236/1977 f.12

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Intr-o mişcare curbilinie plană a unui punct material P, viteza şi acceleraţia lui P au şi expresiile:

$$\vec{v} = v(t)\vec{\tau}, \quad v_\tau = v(t), \quad v_\nu = 0;$$

$$\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_\nu\vec{\nu}; \quad a_\tau = \dot{v}, \quad a_\nu = \frac{v^2}{\rho_c};$$

$$a^2 = a_\tau^2 + a_\nu^2$$

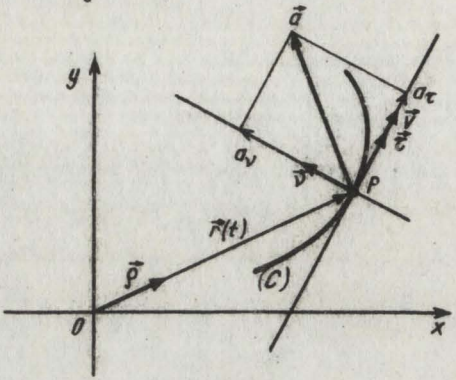


Fig.3.9.

unde $\vec{\tau}$ e versorul tangentei la traiectorie în P, $\vec{\nu}$ este versorul normalei în P la aceeaşi traiectorie şi ρ_c raza de curbură a traiectoriei tot în P.

3.3.2. **Probleme**

1e5. 1) O particulă P se mişcă pe o curbă plană cu viteza $\vec{v} = -2t\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v}(.) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Să se determine vectorul de poziţie $\vec{r}$ al lui P, dacă, se ştie că la $t = 0, \vec{r}(0) = \vec{i}$.

2) O particulă P descrie o astroidă, pentru care $\vec{r}(t) = (a\cos^3 t)\vec{i} + (a\sin^3 t)\vec{j}$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Să se afle viteza $\vec{v}$ la momentul t şi să se arate că modulul vitezei, v, are o valoare maximă, anume $\frac{3a}{2}$, atunci cînd $t = \frac{\pi}{4}$.

3) Ecuaţiile de mişcare ale unei particule P sînt

$$\begin{cases} r = ae^{kt} \\ \theta = kt, \text{ unde } k \text{ şi } a \text{ sînt constante fizice date} \end{cases}$$

iar $t \geq 0$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Să se afle: α) Ecuaţia traiectoriei lui P în coordonatele polare r, θ.

β) Modulul v al vitezei;

γ) Modulul γ^t al acceleraţiei;

δ) Raza de curbură ρ_c a traiectoriei în punctul $P(r, \theta)$.

4) Un punct material P se mişcă uniform (adică a.î. modulul vitezei este constant) pe lănţişorul

$$y = -a + \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad a \in R, \ a > 0.$$

Să se determine ecuaţiile parametrice ale traiectoriei şi proiecţiile vectorului viteză pe axele de coordonate.

5) Două particule P_1 şi P_2 se deplasează prima pe Ox cu viteza $\vec{v}_1 = 2\,\vec{i}$ cm/s şi a doua pe Oy cu viteza $\vec{v}_2 = 3\,\vec{j}$ cm/s. La $t = 0$ avem $\vec{r}_1(0) = -3.\vec{i}$, $\vec{r}_2(0) = -3.\vec{j}$.

α) Să se afle $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$.

β) Cînd şi unde este aprepierea dintre particulele P_1 şi P_2 cea mai mică?

1o6. 1) Un baston AB de lungime a + b alunecă cu capetele A şi B pe două drepte Ox şi Oy perpendiculare. Punctul B se mişcă cu viteza constantă c pe Oy, începînd din O. Să se afle acceleraţia punctului $M \in AB$, ştiind că MA = a, iar MB = b.

2) Un punct material se mişcă după legea

$$\begin{cases} x = 4t - 2t^2 & (1) \\ y = 3t - \frac{1}{2}t^2, \ t \in I & (2) \end{cases}$$

Să se afle ecuaţia carteziană a traiectoriei.

3) O particulă M se mişcă după legea

$$x(t) = a\cos^2 \omega t, \ y(t) = a \sin^2 \omega t, \ t > 0, \qquad (1)$$

unde a şi ω sînt constante fizice pozitive date.

Determinaţi ecuaţia carteziană a traiectoriei, natura mişcării şi ecuaţia orară a mişcării, pentru $t \in \left[0, \frac{\pi}{2\omega}\right]$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

4) Un punct material M se mişcă pe cicloida de ecuaţii parametrice:

$$\begin{cases} x(t) = a\left[\theta(t) - \sin\theta(t)\right] \\ y(t) = a\left[1 - \cos\theta(t)\right] \end{cases}, \quad t \in I \subset [0, +\infty),$$

unde $\theta(t)$ e o funcţie de clasă $C^2(I)$, cu o viteză constantă. Determinaţi proiecţiile acceleraţiei mişcării pe axele Ox şi Oy.

5) Să se determine viteza, acceleraţia normală şi tangenţială ale unui punct care se mişcă după legea

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt - gt^2/2, \end{cases}$$ a, b, g constante fizice date

$t \in I \subset \mathbb{R}$.

De asemenea să se afle raza de curbură a traiectoriei la momentul $t \in I$.

1e7. 1) O particulă P(x,y) se mişcă în planul xOy după legea

$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^4 + t, \end{cases} \quad t \in [0, T]$$

Să se arate că traiectoria acestei particule are un punct de inflexiune pentru $t = 0$ şi că modulul vitezei v, are un maximum pentru $t = 0$.

A.M.M.

2) Un mobil execută o mişcare în planul xOy, după legea:

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3, \end{cases} \quad t \geq 0$$

a) Să se construiască traiectoria acestui mobil şi să se indice sensul în care se mişcă mobilul pe această traiectorie.

b) Să se determine viteza, acceleraţia, acceleraţia tangenţială, acceleraţia normală şi raza de curbură a traiectoriei.

c) Să se afle viteza areolară faţă de O.

d) Să se determine hodograful vitezei faţă de O.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Un disc D de rază R se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă Ox. Să se determine traiectoria unui punct M de pe periferia discului, precum şi legile lui de mişcare, cunoscînd viteza constantă v_0 a centrului C_0 al discului.

4) Un punct se mişcă cu viteza constantă v pe parabola $y = ax^2 + bx + c$.

Să se determine proiecţiile vitezei şi ale acceleraţiei pe axele de coordonate. Să se determine valoarea acceleraţiei γ pentru $x = 0$.

Să se determine γ_ξ, γ_ν şi raza de curbură a traiectoriei.

1o8. 1) Un punct se mişcă pe elipsa

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$$

avînd acceleraţia paralelă cu axa Oy.

Să se afle acceleraţia ca funcţie de y, dacă se ştie că

$$\vec{r}(0) = (0,b), \quad \vec{v}(0) = (v_0,0),$$

2) In planul xOy un punct material M parcurge traiectoria $y = \ell \operatorname{ch} \frac{x}{\ell}$, cu $|\vec{v}| = v$ = constant.

Să se determine proiecţiile vitezei şi ale acceleraţiei punctului pe axele de coordonate, în funcţie de poziţia acestuia, precum şi modulul acceleraţiei $|\vec{a}|$.

3) Să se determine mişcarea unui punct ştiind că acceleraţia sa normală şi cea tangenţială sînt constante.

4) Un punct se mişcă pe parabola

$y = Ax^2 + Bx + C$, cu A, B, C constante fizice date, a.î. acceleraţia sa e paralelă cu axa Oy şi egală cu a.

Să se afle a_ξ şi a_ν, în funcţie de timpul t.

Se presupune $x(.):I \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă $C^2(I)$.

3.3.3. Rezolvarea problemelor

1o5. 1) Dacă avem în vedere că $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, din $\dot{\vec{r}} = -2t\vec{I} + 2\vec{J}$, prin integrare, găsim $\vec{r} = \vec{C} - t^2\vec{I} + 2t\vec{J}$. Condiţia iniţială $\vec{r}(0) = \vec{I}$:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

dă $\vec{c}_1 = \vec{I}$ şi deci vectorul de poziţie al lui P este

$$\vec{r}(t) = (1 - t)^2\vec{I} + 2t\vec{J},$$

cu

$$x(t) = 1 - t^2,\ y(t) = 2t \text{ şi } t \geq 0.$$

2) Prin derivarea în raport cu t a lui $\vec{r}(t)$ găsim vectorul viteză

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = -3a\left[\cos^2 t \sin t.\vec{I} - \sin^2 t \cos t\vec{J}\right]$$

De aici calculăm imediat modulul vitezei

$$v = 3.a.\sin t.\cos t = \frac{3a}{2}\sin 2t.$$

Evident $v = v_{max} = \frac{3a}{2}$, atunci şi numai atunci cînd $\sin 2t = 1$, i.e. atunci cînd $2t = \frac{\pi}{2}$ sau $t = \frac{\pi}{4}$.

3) α) Eliminarea lui t între ecuaţiile date se face imediat; rezultă ecuaţia unei spirale logaritmice:

$$r(\theta) = ae^{\theta}.$$

β) Acum avem $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = 2k^2r^2$,

adică $v = k\sqrt{2}.r$

γ) Calculăm componentele acceleraţiei după $\vec{\rho}$ şi $\vec{\varepsilon}$ şi găsim:

$$\gamma_\rho = \ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\gamma_\varepsilon = \frac{1}{2}\,\widehat{(r^2\dot{\theta})} = 2k^2r.$$

Deci $\gamma = \gamma_\varepsilon = 2 . k^2r.$

δ) Calculăm $\gamma_\tau = \dot{v} = k^2\sqrt{2}.r$; din $\gamma^2 = \gamma_\tau^2 + \gamma_\nu^2$ deducem $\gamma_\nu = k^2\sqrt{2}r$, iar din $\gamma_\nu = v^2/\rho_c$ obţinem $\rho_c = r\sqrt{2}$.

<u>Observaţie</u>. Determinarea lui ρ_c se poate face şi cu formula II(3) din Anexa matematică.

4) Punctul P se mişcă uniform $\Leftrightarrow$ s = bt, $t \geq 0$, unde b e viteza lui constantă.

Din $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$, i.e. din b. dt = $\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)dx$

găsim $bt = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$, (1), dacă luăm x(0) = 0.

Acum relaţia (1) ne dă

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{bt+\sqrt{a^2+b^2t^2}}{a} \qquad (2)$$

respectiv

$$x(t) = a \ln \frac{bt+\sqrt{a^2+b^2t^2}}{a}, \quad t \geq 0 \qquad (3)$$

Cu ajutorul relaţiei (2) calculăm $e^{-\frac{x}{a}}$ şi apoi prin adunare cu (2), obţinem pe y:

$$y(t) = -a+\sqrt{a^2+b^2t^2} \qquad (4) \qquad t \geq 0$$

Proiecţiile vitezei pe axele Ox şi Oy se obţin imediat prin derivarea lui x(t) şi y(t):

$$v_x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2t^2}}, \quad v_y = \frac{b^2t}{\sqrt{a^2+b^2t^2}}$$

5) Fie (x(t), 0) şi (0, y(t)) coordonatele particulelor P_1 şi P_2.

Din $\dot{x}(t) = 2$ şi folosind x(0) = -3, respectiv din $\dot{y}(t) = 3$ şi y(0) = -3, obţinem

$$x(t) = 2t - 3 \text{ şi } y(t) = 3t - 3, \ t \geq 0$$

Acum $\vec{r}_2(t) = (3t-3)\vec{j}$, $\vec{r}_1(t) = (2t-3)\vec{i}$ şi deci

$$\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = (3-2t)\vec{i} + (3t-3)\vec{j}.$$

Distanţa P_1P_2 este $\sqrt{(2t-3)^2+(3t-3)^2} = \sqrt{13t^2-30t+18}$

Sub radical fiind un trinom de gradul al II-lea în t cu a = 13 > 0, rezultă că el admite un minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$, atins pentru $t = \frac{15}{13}$.

Deci P_1P_2 minim = 0,832, atunci cînd P_1 şi P_2 au coordonatele $x_1 = -\frac{9}{13}$, $y_1 = 0$ şi $x_2 = 0$, $y_2 = \frac{6}{13}$.

1o6. 1) Evident ordonata lui B este y = ct, iar abscisa lui A este $x = \sqrt{(a+b)^2 - c^2t^2}$. Avem apoi (din asemănarea triunghiurilor MAM' şi BAO, respectiv BHM" şi BAO):

$$\frac{MA}{BA} = \frac{M'A}{OA} \quad \text{sau} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{x-x_M}{x} \ ; \text{ de aici găsim}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

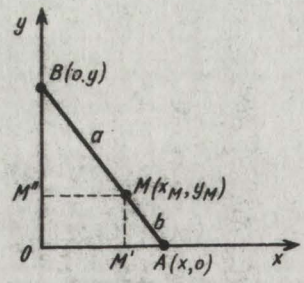


Fig.3.1e.

$$x_M = \frac{b}{a+b} \cdot \sqrt{(a+b)^2 - c^2t^2}\,.$$

Analog obţinem

$\frac{BM}{BA} = \frac{BM''}{BO}$ sau $\frac{b}{a+b} = \frac{y-y_M}{y}$, de unde rezultă $y_M = \frac{a}{a+b} \cdot ct.$

Acum componentele vitezei şi acceleraţiei punctului M se obţin prin derivare în raport cu timpul t:

$$\vec{v}: \quad v_{xM} = -\frac{b}{a+b} \cdot \frac{c^2t}{\sqrt{(a+b)^2 - c^2t^2}}, \quad v_{yM} = \frac{ac}{a+b};$$

$$\vec{a}: \quad a_{xM} = \frac{-bc^2(a+b)}{\left[(a+b)^2 - c^2t^2\right]^{3/2}}, \quad a_{yM} = 0.$$

Intervalul de variaţie a lui t se deduce din condiţia $(a+b)^2 - c^2t^2 \geq 0$.

2) Traiectoria în coordonate carteziene se obţine eliminînd pe t între ecuaţiile (1) şi (2). Rezultă dreapta (d) de ecuaţie $3x-4y = 0$, al cărei grafic se construieşte imediat. Dar nu întreaga dreaptă e traiectoria punctului material.

Semidreapta traiectorie căutată se obţine scriind că ecuaţiile de gradul al doilea în t

$2t^2 - 4t + x = 0$ şi $\frac{3}{2}t^2 - 3t + y = 0$

au rădăcini reale, i.e.: $\Delta_x = 4-2x \geq 0$ şi $\Delta_y = 9 - 6y \geq 0$ (vedeţi figura 3.11).

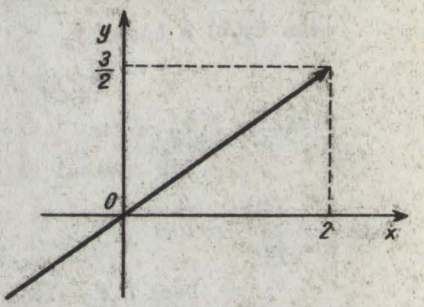


Fig.3.11.

3) Ecuaţia carteziană a traiectoriei particulei se obţine prin eliminarea lui t între ecuaţiile (1). Ea are forma

$$x + y = a$$

şi reprezintă segmentul de dreaptă AB din cadranul I, căci $x \geq 0$ şi $y \geq 0$, $\forall\, t \geq 0$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

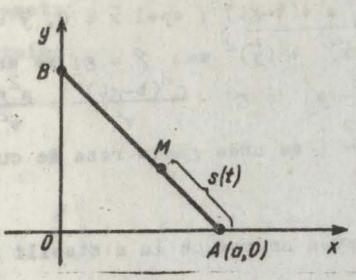


Fig.3.12.

Analiza mişcării e imediată:

La $t = 0$ particula se află în punctul $A(a,0)$ de pe Ox.

La momentul $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ avem $x(t_1)=0$ şi $y(t_1) = a$, adică particula P se află în punctul $B(0,a)$ de pe Oy. La momentul $t_2 = 2t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ avem iar $x(t_2) = a$ şi $y(t_2) = 0$ şi particula revine în A. Mişcarea particulei continuă deci din A în B şi înapoi cu perioada $T = \frac{\pi}{\omega}$

Componentele vitezei particulei sînt

$$v_x = \dot{x} = -a\omega\sin(2\omega t),\quad v_y = \dot{y} = a\omega\sin 2\omega t,\quad t \geq 0.$$

Modulul vitezei este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\omega\sqrt{2}\cdot\sin(2\omega t)$.

Dar $v = \frac{ds}{dt}$, de unde $s(t) = -\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos(2\omega t) + C$. Cum la $t = 0$ avem $s(0) = 0$, rezultă $C = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Obţinem în definitiv $s(t) = AM = a\sqrt{2}\cdot\sin^2(\omega t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2\omega}\right]$.

4) Prin derivare în raport cu t obţinem:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(1-\cos\theta)\cdot\dot{\theta} & (1) \\ \dot{y} = a\sin\theta\cdot\dot{\theta}; & (2) \end{cases}$$

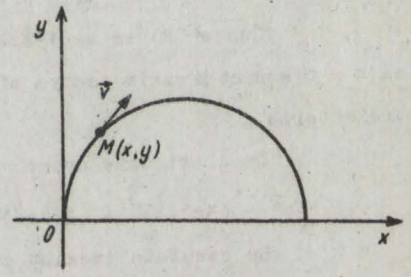


Fig.3.13.

După enunţ v = constant.

Dar $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2a\sin\frac{\theta}{2}\dot{\theta}$ (3)

Acum relaţiile (1) şi (2), cu ajutorul relaţiei (3), se mai scriu:

$$\dot{x} = v\sin\frac{\theta}{2},\quad \dot{y} = v\cos\frac{\theta}{2}$$

O nouă derivare în raport cu t a componentelor vitezei şi folosirea relaţiei (3) ne conduc la proiecţiile acceleraţiei pe axele Ox şi Oy, anume la

$$\ddot{x} = \frac{v^2}{4a}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \quad \text{şi} \quad \ddot{y} = -\frac{v^2}{4a}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

5) Prin derivare găsim

$\dot{x} = a$, $\dot{y} = b - gt$; deci $v = \sqrt{a^2+(b-gt)^2}$; apoi $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -g$ şi acum acceleraţia γ va fi $\gamma = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2}$ sau $\gamma = g$; pe de altă parte $a_g = \dot{v} = \frac{-g(b-gt)}{v}$ şi $a_\gamma^2 = \gamma^2 - a_g^2 = g^2 - \frac{g^2(b-gt)^2}{v^2} = \frac{a^2g^2}{v^2}$; deci $a_\gamma = \frac{ag}{v}$; dar se ştie că $a_\gamma = \frac{v^2}{\rho_c}$, de unde găsim raza de curbură a traiectoriei $\rho_c = \frac{v^3}{ag}$.

1o7. 1) In fond problema pusă se reduce la a stabili dacă curba dată sub formă parametrică

$$x(t) = t^3 - t,\ y(t) = t^4 + t,\quad t \in \mathcal{V}(0)$$

are în $t = 0$ un punct de inflexiune.

Se ştie că un punct de inflexiune pentru o asemenea curbă este un punct în care $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ trece printr-un maxim sau minim.

Ori în cazul nostru avem

$$m(t) = -\frac{1+4t^3}{1-3t^2}$$

In vecinătatea lui $t = 0$ funcţia $m(t)$ are dezvoltarea Mac Laurin

$$m(t) = -(1+3t^2 + 4t^3 + 9t^4 + \ldots)$$

Cum $m'(t)$ se anulează în $t = 0$ şi $m''(0) = -6 < 0$, rezultă că $t = 0$ e punct de maxim pentru $m(t)$, adică punct de inflexiune pentru traiectorie.

In continuare avem:

$$v^2 = (3t^2-1)^2 + (1+4t^3)^2 = 2 - 6t^2 + 8t^3 + \ldots$$

Se constată imediat că v^2 are un maxim local pentru $t = 0$, şi deci aceeaşi proprietate o are şi v.

2) a) Date fiind ecuaţiile parametrice, pe ele citim următoarele proprietăţi ale mişcării:

α) $x \geq 0$;

$y = \frac{t}{3}(9-x)$ şi semnul lui y e dat de polinomul $9-x$ şi anume pentru $x < 9$ avem $y > 0$ şi pentru $x > 9$ avem $y < 0$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Ţinînd seama de aceasta, eliminarea lui t între ecuaţiile parametrice ale traiectoriei ne conduce la următoarea ecuaţie carteziană a traiectoriei

$$y = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{x}(9-x)$$

Graficul ei se construieşte imediat:

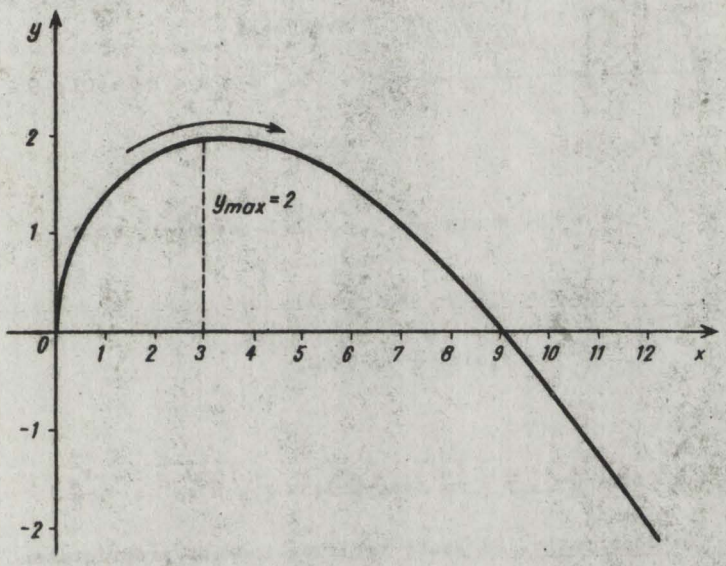


Fig.3.14.

Sensul în care se mişcă mobilul e indicat pe grafic.

b) Componentele vitezei şi acceleraţiei se calculează imediat:

$\dot{x}(t) = 6t$, $\dot{y}(t) = 3(1-t^2)$; $v(t) = (\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t))^{1/2} = 3(1+t^2)$;

$\ddot{x}(t) = 6$; $\ddot{y}(t) = -6t$; $a(t) = 6\sqrt{1+t^2}$;

$a_\tau = \dot{v}(t) = 6t$; $a_\tau^2 + a_\nu^2 = a^2 \Rightarrow a_\nu = 6$;

$\rho_c = \frac{v^2}{a_\nu} = \frac{3}{2}(1+t^2)^2$.

c) $\Omega(t) = \frac{1}{2}(\dot{x}y - x\dot{y}) = -\frac{3t^2}{2}(3+t^2)$.

d) Fie $\xi := \dot{x}(t)$ şi $\eta := \dot{y}(t)$; atunci eliminarea lui t ne conduce la $\eta = 3 - \frac{\xi^2}{12}$ (ramura parabolei situată în semiplanul $\xi \geq 0$).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Determinarea ecuațiilor parametrice ale traiectoriei. Fie $\theta = \widehat{I C_0 M}$. Avem

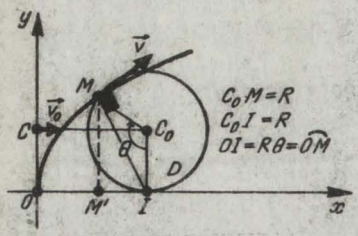


Fig.3.15.

$$x = OI - M'I = R\theta - R\sin\theta =$$
$$= R(\theta - \sin\theta);$$
$$y = MM' = R+R\cos(\pi - \theta) =$$
$$= R(1-\cos\theta), \quad \theta\in[0,2\pi].$$

Avem apoi

$$CC_0 = v_0 t = R\theta = OI; \quad \theta = \frac{v_0 t}{R}$$

Acum avem:

$$x = v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R}, \quad y = R(1-\cos\frac{v_0 t}{R}), \quad t \geq 0.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0(1 - \cos(\frac{v_0 t}{R})) \\ \dot{y} = v_0\sin(\frac{v_0 t}{R}), \quad t \geq 0, \end{cases}$$

respectiv

$$\ddot{x} = \frac{v_0^2}{R}\sin(\frac{v_0 t}{R}), \quad \ddot{y} = \frac{v_0^2}{R}\cos(\frac{v_0 t}{R}); \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2} = \frac{v_0^2}{R}.$$

Observație. Se poate verifica imediat proprietatea "$\vec{v} \perp \overrightarrow{IM}$", care ne spune că suportul vitezei trece prin punctul diametral opus lui I pe circumferința discului.

4) Ecuațiile parametrice ale traiectoriei fiind

$$\begin{cases} x = x \\ y = ax^2 + bx + c, \quad x\in I\subset R, \end{cases}$$

versorul tangentei la traiectorie va fi

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{I} + (2ax+b)\vec{J}}{\sqrt{1+(2ax+b)^2}};$$

acum proiecțiile vitezei v_x și v_y pe axele Ox și Oy se obțin imediat

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$v_x = \frac{v}{\sqrt{1+(2ax+b)^2}}, \quad v_y = \frac{v(2ax+b)}{\sqrt{1+(2ax+b)^2}}, \quad x \in I.$$

Proiecţiile γ_x şi γ_y ale acceleraţiei $\vec{\gamma}$ pe axe precum şi celelalte elemente ale mişcării se calculează imediat:

$$\gamma_x = \frac{d}{dt}(v_x) = -\frac{2av^2(2ax+b)}{\left[1+(2ax+b)^2\right]^2}; \quad \gamma_y = \frac{d}{dt}(v_y) = \frac{2av^2}{\left[(1+(2ax+b)^2\right]^2};$$

$$\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = \frac{2av^2}{(1+(2ax+b)^2)^{3/2}};$$

$$\gamma(0) = 2av^2; \quad \vec{v} = v\vec{\tau}; \quad \vec{\gamma} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho_c}\vec{\nu};$$

$$\gamma_\tau = \dot{v} = 0, \quad \gamma_\nu = \frac{v^2}{\rho_c}; \quad \rho_c = \frac{v^2}{\gamma_y} = \frac{(1+(2ax+b)^2)^{3/2}}{2a}.$$

1o8. 1) Ecuaţia elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

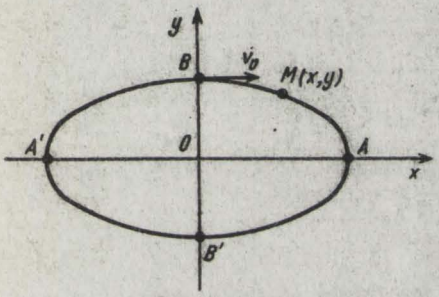


Fig.3.16.

O reprezentare parametrică a traiectoriei va fi

$$\begin{cases} x(t) = a\cos\theta(t) \\ y(t) = b\sin\theta(t), \end{cases} \theta : I \subseteq [0,+\infty) \to \mathbb{R},$$

de clasă C^2.

Acceleraţia $\ddot{y}(t)$ se calculează imediat:

$$\dot{y}(t) = b\cos\theta(t)\cdot\dot{\theta}(t);$$

$$\ddot{y}(t) = -b\sin\theta(t)\cdot\dot{\theta}^2(t) + b\cos\theta(t)\cdot\ddot{\theta}(t) \qquad (1)$$

Astfel avem nevoie de $\dot{\theta}^2(t)$ şi de $\ddot{\theta}(t)$.

Pentru determinarea acestor funcţii folosim faptul că după enunţ, $\ddot{x} = 0$ şi $\ddot{y} \neq 0$. Rezultă imediat $\dot{x} = C_1$; dar $\dot{x}(0) = v_0$ (după enunţ); deci $\dot{x}(t) = v_0$; pe de altă parte avem

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$\dot{x}(t) = -a\,\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)$; deci egalînd $\dot{x}(t)$ cu v_0 avem

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{v_0}{a\sin\theta(t)}\,,\quad \sin\theta(t) \neq 0$$

Acum deducem imediat pe $\ddot{\theta}(t)$;

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{v_0}{a\sin^2\theta(t)}\cdot\cos\theta(t)\cdot\dot{\theta}(t) =$$

$$= -\frac{v_0^2}{a^2}\cdot\frac{\cos\theta(t)}{\sin^3\theta(t)}$$

Inlocuind pe $\dot{\theta}$ şi $\ddot{\theta}$ în expresia lui $\ddot{y}$ găsim:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{b^4 v_0^2}{a^2 y^3}$$

2) Presupunem că $x(.): I \to R$ este o funcţie de clasă $C^2(I)$. Atunci prin derivare găsim proiecţiile vitezei:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \dot{y} = \dot{x}\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{\ell};\ v^2 = \dot{x}^2\mathrm{ch}^2\frac{x}{\ell}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{v}{\mathrm{ch}\,\frac{x}{\ell}} \\ \dot{y} = v\,\mathrm{th}\,\frac{x}{\ell} \end{cases}$$

respectiv ale acceleraţiei

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{v}{\ell}\dot{x}\dfrac{\mathrm{sh}\,\frac{x}{\ell}}{\mathrm{ch}^2\frac{x}{\ell}} = -\dfrac{v^2}{\ell}\cdot\dfrac{\mathrm{sh}\,\frac{x}{\ell}}{\mathrm{ch}^3\frac{x}{\ell}}\ ; \\ \ddot{y} = \ddot{x}\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{\ell} + \dfrac{\dot{x}^2}{\ell}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{\ell} = \dfrac{v^2}{\ell}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^3 x}\ ; \end{cases}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{v^2}{\ell\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{\ell}}$$

3) Conform enunţului trebuie să avem

$$a_\tau = \dot{v} = C_1 \quad \text{şi} \quad a_\nu = \frac{v^2}{\rho_c} = C_2$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Deci ecuaţiile mişcării le vom deduce din

$$\begin{cases} \dot{v} = C_1 \quad (1) \quad \text{şi} \\ v^2 = \rho_c C_2 \quad (2) \end{cases}$$

Cum $v = \frac{ds}{dt}$, din (1) obţinem $s = \frac{C_1 t^2}{2} + C_3 t + C_4$.

Alegem un caz mai simplu, anume, acela în care $C_3 = C_4 = 0$. Rămîne că $s = \frac{C_1 t^2}{2}$.

Se ştie că $\rho_c = \frac{ds}{d\alpha}$, cu α unghiul de contingenţă. Deci, folosind (2), găsim:

$$\frac{v^2}{C_2} = \frac{ds}{d\alpha}; \quad \frac{C_1^2 t^2}{C_2} = \frac{ds}{d\alpha} \text{ sau } \frac{2C_1 s}{C_2} = \frac{ds}{d\alpha}$$

Această ecuaţie diferenţială ne dă $s = K e^{\frac{2C_1 \alpha}{C_1}}$. Să alegem $K = 1$. Vom avea $s = e^{\frac{2C_1 \alpha}{C_2}}$.

Dar, pe de altă parte, se ştie că

$$dx = ds \cos\alpha = \frac{2C_1}{C_2} e^{\frac{2C_1}{C_2}\alpha} \cdot \cos\alpha \, d\alpha \text{ şi}$$

$$dy = ds \sin\alpha = \frac{2C_1}{C_2} e^{\frac{2C_1 \alpha}{C_2}} \sin\alpha \, d\alpha.$$

Fără constante de integrare obţinem:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2C_1 e^{\frac{2C_1 \alpha}{C_2}} (2C_1 \cos\alpha + C_2 \sin\alpha)}{4C_1^2 + C_2^2} \\ y = \dfrac{2C_1 e^{\frac{2C_1 \alpha}{C_2}} (2C_1 \sin\alpha - C_2 \cos\alpha)}{4C_1^2 + C_2^2} \end{cases}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Dacă acum calculăm raportul $\frac{Y}{X}$, găsim $\frac{Y}{X} = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, unde $\operatorname{tg}\beta = \frac{C_2}{2C_1}$.

Rezultă $\theta = \alpha - \beta$ sau $\alpha - \theta = \beta =$ constant, relaţie care ne spune că unghiul β pe care-l face tangenta geometrică la traiectorie cu raza vectoare în acel punct este constant.

După o proprietate cunoscută, traiectoria punctului va fi o spirală logaritmică.

Ecuaţia ei se obţine imediat adunând x^2 cu y^2 şi înlocuind α cu $\theta + \beta$. Găsim imediat

$r(\theta) = A \cdot e^{\frac{2C_1\theta}{C_2}}$ (ecuaţia polară a unei spirale logaritmice, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$).

4) Conform enunţului avem $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = a$.

Dar (1) $\dot{y} = 2A\dot{x}\dot{x} + B\dot{x}$ şi $\ddot{y} = 2A\dot{x}^2 + 2Ax\ddot{x} + B\ddot{x}$ (2)

Din $\ddot{y} = a$ găsim $y = \frac{1}{2} \cdot at^2 + C_1 t + C_2$ (3)

Din (2) deducem $a = 2 \cdot A\dot{x}^2$; de aici obţinem

$\dot{x} = \sqrt{\frac{a}{2A}}$ sau $\dot{x} = -\sqrt{\frac{a}{2A}}$ în ipoteza $aA > 0$.

Să considerăm cazul $\dot{x} = \sqrt{\frac{a}{2A}}$. Înlocuind în (1), pe y şi x obţinem:

$$at + C_1 = 2Ax\sqrt{\frac{a}{2A}} + B\sqrt{\frac{a}{2A}},$$

iar de aici găsim pe $x(t)$,

$$x(t) = \frac{at + C_1 - B\sqrt{\frac{a}{2A}}}{\sqrt{2 \cdot Aa}}, \quad t \in I. \qquad (4)$$

Deci (3) şi (4) ne dau ecuaţiile parametrice ale curbei pe care o descrie punctul din problemă:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{at + C_1 - R\sqrt{\frac{a}{2A}}}{\sqrt{2 \cdot Aa}} \\ y(t) = \frac{1}{2} at^2 + C_1 t + C_2, \quad t \in I. \end{cases}$$

Dăm şi formulele pentru componentele vitezei şi ale acceleraţiei:

$$\dot{x} = \frac{a}{\sqrt{2Aa}}, \quad \dot{y} = at + C_1; \quad v = \sqrt{(at + C_1)^2 + \frac{a}{2A}}$$

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = a; \quad \gamma = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = a.$$

In continuare obţinem

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{(at+C_1)a}{v}; \quad \gamma^2 = a_\tau^2 + a_\nu^2$$

$$a_\nu^2 = \gamma^2 - a_\tau^2 = a^2 - \frac{(at + C_1)^2 a^2}{(at+C_1)^2 + \frac{a}{2A}} = \frac{a^3}{2A \cdot v^2}$$

De aici deducem, pînă la un semn,

$a_\nu = \dfrac{a^2}{\sqrt{2Aa} \cdot v}$. Comparînd pe a_ν cu $\dfrac{v^2}{\rho_c}$, găsim raza de curbură a traiectoriei $\rho_c = \dfrac{\sqrt{2Aa} \cdot v^3}{a^2}$.

§.3.4. Mişcări circulare

3.4.1. Rezumat teoretic

1. Mişcarea circulară $\overline{r}: \begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t), \\ y(t) = R\sin\theta(t), \end{cases} \overline{r} = R\overline{\rho}$

$t \in I \subset \mathbb{R}$, θ de clasă C^2

$$\overline{v}: \begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta; \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta; \end{cases} \overline{v} = R\dot{\theta}\overline{\varepsilon}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

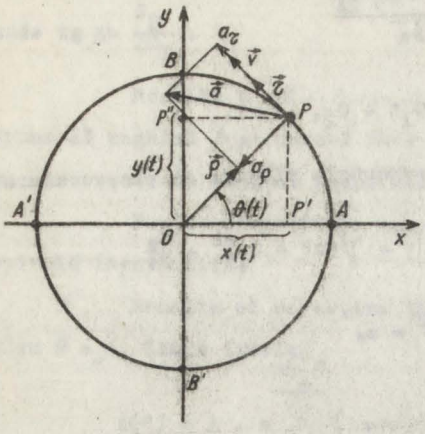


Fig.3.17.

$$\vec{a}\,\begin{cases} \ddot{x} = -R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta & a_\tau = R\ddot{\theta} \\ \ddot{y} = R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta ; & a_\rho = -R\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{\varepsilon} - R\dot{\theta}^2\vec{\rho}$$

2. In cazul $\dot{\theta} = \omega = $ constant spunem că P are o mişcare circulară uniformă şi avem

$\theta(t) = \omega t + \theta_0$; $v = R\omega$; $a = -R\omega^2$ (acceleraţia centripetă); perioada mişcării $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (secunde), frecvenţa mişcării $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (herţi).

3. Mişcarea armonică. Proiectînd punctul P pe Ox în P' avem $OP' = x(t) = R\cos(\omega t + \theta_0)$. Mişcarea punctului P' de-a lungul diametrului A'A, descrisă cu ajutorul abscisei x(t), se numeşte mişcare armonică. Cantitatea x(t) se numeşte elongaţie, R amplitudine, $\omega t + \theta_0$ faza mişcării, ω pulsaţie, iar θ_0 faza iniţială.

3.4.2. Probleme

1o9. 1) Care sînt perioadele de rotaţie şi vitezele unghiulare ale acelor unui ceasornic?

2) Arătătoarele unui ceas sînt perfect suprapuse la orele 12. La ce oră vor face pentru prima dată între ele un unghi egal cu un radian?

Admitere Şcoala Politehnică, Bucureşti, 1945

3) Un gîndac este aşezat în centrul unui disc de pick-up. La un moment dat discul începe să se rotească cu 16 rotaţii/minut şi gîndacul să se deplaseze radial spre marginea discului cu o viteză constantă.

Dacă gîndacul ajunge din centru la periferia discului înabil în 15 secunde, descrieţi mişcarea gîndacului, văzută de o persoană care se află lîngă pick-up.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

11e. 1) Un punct material M se mişcă uniform pe un cerc de rază R = 6m, cu $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad/s, în sensul trigonometric.

a) Scrieţi expresia vectorului de poziţie al acestui punct.

b) Determinaţi vectorul viteză $\vec{v}$ şi modulul v al vitezei.

c) Determinaţi $\vec{a}$, a, a_ϱ şi a_φ.

d) Determinaţi $\sphericalangle(\vec{r},\vec{v})$, $\sphericalangle(\vec{r},\vec{a})$ şi $\sphericalangle(\vec{v},\vec{a})$.

e) Determinaţi perioada şi frecvenţa mişcării.

2) Un tren se mişcă pe o cale ferată curbă, care într-un punct al ei are raza de curbură ϱ_c = 4oo m, punct în care a_ϱ = o,2 m/s^2 şi v = 1o m/s. Calculaţi a_φ şi a în acelaşi punct.

3) Un punct P descrie o traiectorie plană. Vectorul acceleraţiei se deduce din vectorul viteză printr-o rotaţie de un unghi $u = \pi/2$, în jurul poziţiei punctului respectiv. Să se afle mişcarea punctului şi să se deducă hodograful vitezei.

111. 1) Un punct se mişcă pe un cerc de rază R, după legea $s = v_o t - \frac{ct^2}{2}$.

Să se determine acceleraţia punctului respectiv.

2) Un punct P descrie cercul $x^2 + y^2 = 1$ cu o acceleraţie constantă şi egală cu 1 (m/s^2). În punctul $P_o(1,0)$ acceleraţia e dirijată către centrul cercului.

Demonstraţi că, în condiţiile precedente, punctul se mişcă uniform sau se mişcă accelerat, cu următoarele componente ale acceleraţiei

$$\vec{a}: \begin{cases} \ddot{x} = -\cos 3\theta \\ \ddot{y} = -\sin 3\theta, \end{cases} \qquad \theta \text{ fiind unghiul polar al lui P.}$$

3) Un corp C este susţinut de un fir care se desfăşoară de pe un tambur T, de rază R. Se cere viteza unghiulară ω cu care se roteşte tamburul şi acceleraţia normală şi tangenţială a punctului B de pe tambur, aflat la contactul dintre tambur şi fir, dacă viteza corpului C este $\vec{v}$ şi acceleraţia sa $\vec{a}$ (vedeţi figura 3.18.).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

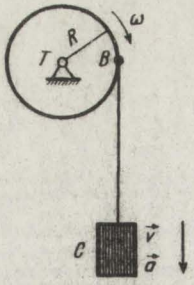


Fig.3.18.

3.4.3. Rezolvarea problemelor

1o9. 1) Acul orar: $T_o = 12\ h$; $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} = \frac{2}{12 \cdot 3600}$ rad/s.

Acul minutar: $T_m = 1h$; $\omega_m = \frac{2\pi}{T_m} = \frac{2\pi}{3600}$ rad/s.

Acul secundar: $T_s = 1$ minut; $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{60}$ rad/s.

2) Fie ω_m și ω_o vitezele unghiulare ale acului minutar și a celui orar. Atunci unghiurile parcurse de aceste ace sînt

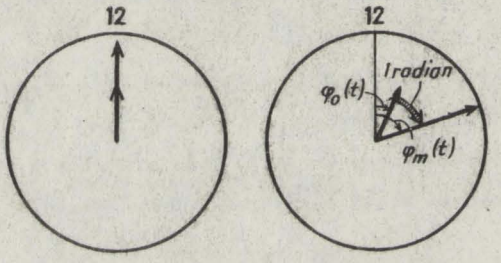


Fig.3.19.

$$\varphi_m(t) = \omega_m \cdot t \quad \text{și} \quad \varphi_o(t) = \omega_o \cdot t,$$

iar diferența lor trebuie să fie 1 radian. Deci

$$(\varphi_m - \varphi_o)t = 1 \quad \text{sau} \quad t = \frac{1}{\varphi_m - \varphi_o}.$$ Dar am văzut că

$$\omega_m = \frac{2\pi}{3600} \quad \text{și} \quad \omega_o = \frac{2\pi}{43200}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Prin urmare

$$t = \frac{1}{1,7444.1e^{-3} - 1,4537.1e^{-4}} = \frac{1e^{4}}{17,444 - 1,4537} =$$

$= 625,37913$ secunde $\approx$ 1e minute 42 secunde.

3) Turaţia discului se poate scrie $n = \frac{16 \text{ rot}}{6e \text{ secunde}} =$

$= 4$ rot/15 secunde.

Deci în 15 secunde discul va face 4 rotaţii, iar gîndacul se va mişca pe o spirală, parcurgînd 4 spire ale acesteia.

IIe. 1) a) Avem imediat $x(t) = 6 \cos \frac{\pi t}{4}$, $y(t) = 6 \sin \frac{\pi t}{4}$, $t \geq 0$. Deci $\vec{r}(t) = 6 \cos \frac{\pi t}{4} \cdot \vec{I} + 6 \sin \frac{\pi t}{4} \cdot \vec{j}$.

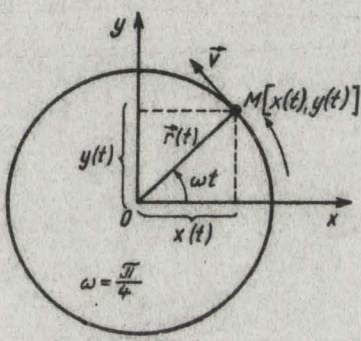


Fig.3.2e.

b) $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{3\pi}{2}(- \sin \frac{\pi t}{4} \cdot \vec{I} + \cos \frac{\pi t}{4} \cdot \vec{j})$;

$v = \frac{3\pi}{2} = \text{constant}$

c) $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{3\pi^2}{8} (- \cos \frac{\pi t}{4} \cdot \vec{I} - \sin \frac{\pi t}{4} \cdot \vec{j})$;

$a = \frac{3\pi^2}{8} = \text{constant}$, $a_\tau = \dot{v} = 0$; $a_y = \frac{v^2}{R} = \frac{3\pi^2}{8}$.

d) $\cos(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{rv} = 0$; $\sphericalangle(\vec{r}, \vec{v}) = 9e^\circ$, evident.

Analog găsim $\sphericalangle(\vec{r}, \vec{a}) = 18e^\circ$, $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{a}) = 9e^\circ$.

e) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$ secunde; $f = \frac{1}{T} = e,125$ Hz.

2) Se ştie că $a_y = \frac{v^2}{\rho_c} = \frac{1ee}{4ee} = e,25$ m/s^2; apoi

Cda. 236/987 Fasc. 13

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$a = \sqrt{a_\nu^2 + a_\tau^2} = \sqrt{0,1e25}\ m/s^2 \simeq 0,32\ m/s^2.$$

3) Deoarece $\vec{a} \perp \vec{v}$, rezultă că $a_\tau = 0$; deci $\frac{dv}{dt} = 0$, adică $v = v_0 = \text{constant}$; dar, atunci, numeric putem scrie: $a = v = v_0 = \text{constant}$. Din $a_\nu = a = \frac{v^2}{\rho_c}$ deducem $\rho_c = v_0$ (numeric) și traiectoria lui P este un cerc de rază (numeric) egală cu v_0.

Intrucît $v = v_0 = \text{constant}$, rezultă că hodograful vitezei e un cerc de rază v_0, ca și traiectoria lui P.

III. 1) Arcului $s(t)$ îi corespunde unghiul la centru $\theta = \frac{s(t)}{R}$; acum $\omega = \dot{\theta} = \frac{\dot{s}(t)}{R} = \frac{v_0 - ct}{R}$.

Dacă avem în vedere că

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta(t)\,\vec{i} + R\sin\theta(t)\,\vec{j},\quad t \in I,$$

deducem imediat

$$\vec{v}:\ \begin{cases} v_x = -R\sin\theta\cdot\omega, \\ v_y = R\cos\theta\cdot\omega; \end{cases} \qquad \vec{a}:\ \begin{cases} \ddot{x} = -R\omega^2\cos\theta - R\dot{\omega}\sin\theta, \\ \ddot{y} = -R\omega^2\sin\theta + R\dot{\omega}\cos\theta; \end{cases}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega;\quad a = R\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}.$$

Componentele vitezei și ale accelerației după $\vec{\tau}$ și $\vec{\nu}$ sînt:

$$v_\tau = R\omega, \qquad a_\tau = R\dot{\omega},$$
$$v_\nu = 0, \qquad a_\nu = \frac{v^2}{R} = R\omega^2.$$

2) Se știe că în coordonate polare avem

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \text{ și } a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}.$$

In cazul particular $r = \text{constant}$, relațiile acestea devin:

$$a_\rho = -r\dot{\theta}^2 \text{ și } a_\theta = r\ddot{\theta}.$$

Cu $r = 1$, găsim $a_\rho = -\dot{\theta}^2$, $a_\theta = \ddot{\theta}$, respectiv, conform enunțului, $a^2 = 1$, $(\dot{\theta}^2)^2 + \ddot{\theta}^2 = 1$. (1)

Am obținut o cd de ordinul al 2-lea neliniară pentru $\theta(t)$, $\theta: I \longrightarrow R$, $\theta(t) \in C^2(I)$. "Curba" definită de (1) se poate parametriza astfel $\theta'^2 = \cos z(t)$ (2) $\ddot{\theta} = \sin z(t)$, $t \in I$, (3)

Din relația (2) deducem

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$\frac{d}{dt}(\dot\theta^2) = 2\dot\theta\ddot\theta = -\sin z.\dot z$ sau $2\dot\theta.\sin z = -\sin z.\dot z$ sau $\sin z = 0$

$\longrightarrow \ddot\theta = 0$, $\theta = \omega t + \varphi$ și deci punctul are o mișcare uniformă sau $2\dot\theta = -\dot z$ sau $z = -2\theta + C$; cum la $t = 0$ avem $\theta = 0$, rezultă $z = -2\theta(t)$, $t \in I$.

Acum a_ρ și a_θ se scriu $a_\rho = -\theta'^2 = -\cos(2\theta)$ și $a_\theta = -\sin 2\theta$

$x = \cos\theta$ $\qquad$ $y = \sin\theta$

$\dot x = -\sin\theta\cdot\dot\theta$ $\qquad$ $\dot y = \cos\theta\cdot\dot\theta$

$\ddot x = -\dot\theta^2\cos\theta - \ddot\theta\sin\theta = -\cos\theta.(\cos 2\theta) +$

$+ \sin\theta.\sin 2\theta = -\cos 3\theta$

$\ddot y = -\dot\theta^2\sin\theta + \ddot\theta\cos\theta = -\sin\theta.\cos 2z +$

$+ \cos\theta\sin(-2\theta) = -\sin 3\theta$

Deci, în adevăr, proiecțiile accelerației au forma anunțată:

$\ddot x(t) = -\cos\theta(t)$, $y(t) = -\sin 3\theta(t)$, $t \in I$.

3) Dacă B e considerat pe fir, avem

$$v_B = v \text{ și } a_B = a.$$

Dacă B e considerat pe tambur atunci avem $v_B = R\omega = v$.

De aici deducem pe $\omega = \frac{v}{R}$.

Acum $\vec a_B = \vec a_{B\tau} + \vec a_{Bn}$, unde $a_{B\tau} = \dot v = a$ și $a_{Bn} = \frac{v^2}{R}$. Deci

$$\omega = \frac{v}{R},\ a_{B\tau} = a,\ a_{Bn} = \frac{v^2}{R}.$$

§. 3.5. Mișcări în spațiu

3.5.1. Rezumat teoretic

1. Vectorul de poziție $\vec r(t)$ al unui punct care se mișcă pe o traiectorie (C) în $\mathbb{R}^3$ are forma

$\vec r(t) = x(t)\vec i + y(t)\vec j + z(t)\vec k$, $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$,

unde $\vec i, \vec j, \vec k$ sînt versorii axelor Ox, Oy, Oz, iar $\vec r(.): [0,R] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec r(t) \in C^2$.

2. Viteza $\vec v(t)$ a unui punct care se mișcă pe o traiectorie (C) de clasă C^1 în $\mathbb{R}^3$ este $\vec v = \frac{d\vec r}{dt}$ sau:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\bar{v}(t) = v_x(t)\bar{i} + v_y(t)\bar{j} + v_z(t)\bar{k}: = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k};$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt},\ v_y(t) = \frac{dy}{dt},\ v_z(t) = \frac{dz}{dt};$$

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}\ .$$

Unghiurile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ pe care viteza $\bar{v}(t)$ le face cu axele de coordonate sînt definite de ecuaţiile:

$$\cos\alpha_1 = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}},\ \cos\alpha_2 = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}},\ \cos\alpha_3 = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}.$$

3. Acceleraţia unui punct care se mişcă pe o traiectorie (C) de clasă C^2 în $\mathbb{R}^3$ este $\bar{a}: = \frac{d\bar{v}}{dt}: = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ sau:

$$\bar{a} = a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k} = \frac{dv_x}{dt}\bar{i} + \frac{dv_y}{dt}\bar{j} + \frac{dv_z}{dt}\bar{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k};$$

$$a_x(t): = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2};$$

$$a_y(t): = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2};$$

$$a_z(t): = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Unghiurile $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ pe care acceleraţia $\bar{a}(t)$ le face cu axele de coordonate sînt definite de ecuaţiile:

$$\cos\beta_1 = \frac{a_x}{a},\ \cos\beta_2 = \frac{a_y}{a},\ \cos\beta_3 = \frac{a_z}{a}$$

4. În coordonatele cilindrice r, φ, z cu $r(.), \varphi(.), z(.): I \to \mathbb{R}$ $r(t), \varphi(t), z(t) \in C^2(I)$, viteza şi acceleraţia se determină cu formulele:

$$\bar{v} = \dot{r}(t)\bar{\rho} + r(t)\cdot\dot{\varphi}(t)\bar{\varepsilon} + \dot{z}(t)\bar{k};$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2};$$

$$\bar{a} = \left[\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\varphi}^2(t)\right]\bar{\rho} + \left(2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t) + r(t)\ddot{\varphi}(t)\right)\bar{\varepsilon} + \ddot{z}(t)\bar{k}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Am notat cu $\vec{\rho}$ versorul $\frac{x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$ cu $\vec{\varepsilon}$ un versor perpendicular pe $\vec{\rho}$ şi cu $\vec{k}$ versorul axei Oz.

5. In coordonatele sferice r, θ, φ cu

$$r(.), \theta(.), \varphi(.): I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r(t), \theta(t), \varphi(t) \in C^2(I),$$

vectorul viteză $\vec{v}$ şi acceleraţie $\vec{a}$ se determină cu formulele:

$$\vec{v} = \dot{r}(t)\vec{i}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{i}_\theta + r(t)\dot{\varphi}(t)\sin\theta(t)\vec{i}_\varphi$$

unde $\vec{i}_r = \sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{j} + \cos\theta\cdot\vec{k}$,

$\vec{i}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$,

$\vec{i}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$;

$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}$,

$\vec{a} = a_r\vec{i}_r + a_\theta\cdot\vec{i}_\theta + a_\varphi\vec{i}_\varphi$; unde

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$

$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2$

$a_\varphi = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi})$.

6. Formulele lui Frenet:

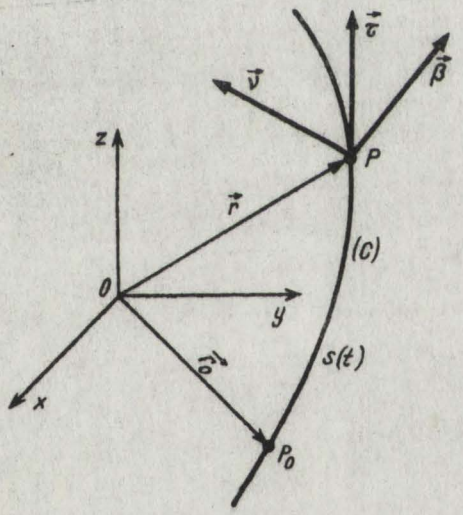


Fig.3.21.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho_c}\cdot\vec{\nu} \\ \frac{d\vec{\nu}}{ds} = \frac{1}{\rho_t}\vec{\beta} - \frac{1}{\rho_c}\vec{\tau} \\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\frac{1}{\rho_t}\vec{\nu} \end{cases}$$

unde $\vec{\tau}$ = versorul tangentei la curbă în punctul M, i.e. $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$

$\vec{\nu}$ = " normalei principale la curbă în M

$\vec{\beta}$ = " binormalei la curbă în M

ρ_c = raza de curbură în M.

ρ_t = raza de torsiune la curbă în M.

Amintim că:

versorii $\vec{\tau}$ şi $\vec{\nu}$ definesc planul osculator al curbei;

versorii $\vec{\nu}$ şi $\vec{\beta}$ definesc planul normal la curbă;

versorii $\vec{\beta}$ şi $\vec{\tau}$ definesc planul rectificant la curbă.

8. Componentele vitezei şi acceleraţiei faţă de triedrul lui Frenet sînt:

$$a_\tau = \dot{v};\ v_\nu = 0;\ v_\beta = 0, \text{ fiindcă } \vec{v} = v\vec{\tau}$$

$$a_\tau = \dot{v},\ a_\nu = \frac{v^2}{\rho_c},\ a_\beta = 0,$$

căci $\vec{a} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho_c}\vec{\nu}$.

9. Mişcarea unui punct material P din $\mathbb{R}^3$ poate fi descrisă şi cu ajutorul traiectoriei dată prin intersecţia a două suprafeţe de ecuaţie:

(1) $$F_1(x,y,z) = 0 \quad \text{şi} \quad F_2(x,y,z) = 0,$$

împreună cu legea de mişcare pe această traiectorie

$$s = \varphi(t),\ \varphi: I \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi \in C^2(I),$$

unde s e lungimea arcului de curbă măsurat de la un punct origine P_0, într-un sens ales ca pozitiv pe curba de ecuaţii (1).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3.5.2. **Probleme**

112. 1) Punctele P,Q și $R \in \mathbb{R}^3$ execută mișcările date de legile

$$P:\begin{cases} x = 35.t \\ y = \frac{At^2}{2} \\ z = \frac{Ct^4}{2} + \frac{Dt^2}{4};\ t \geq 0 \end{cases} \qquad Q:\begin{cases} x = 5\cos(8t) \\ y = 25\,t \\ z = 7.e^{-t},\ t \geq 0 \end{cases} \qquad R:\begin{cases} x = t^2 \sin 6t \\ y = \sqrt{t}\,\operatorname{tg} 5t \\ z = A\ln t;\ t > 0 \end{cases}$$

Să se afle proiecțiile vitezelor și accelerațiilor acestor puncte, știind că A,C,D sînt constante fizice date.

2) Să se arate că punctul $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, care se mișcă după legea

$$\begin{cases} x(t) = R\cos^2\omega t \\ y(t) = \frac{R}{2}\sin 2\omega t \\ z(t) = R\sin\omega t, \quad t \geq 0 \text{ și } R \in \mathbb{R}_+^* \text{ un număr dat,} \end{cases}$$

descrie <u>curba lui Viviani</u>. Să se calculeze proiecțiile vitezei și ale accelerației punctului mobil P pe axele de coordonate.

3) Mișcarea unui punct material $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ este dată prin ecuațiile

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t^3 \\ z = 6.t,\ t \geq 0, \end{cases}$$

t fiind măsurat în secunde, iar x,y,z în metri.

α) Să se determine punctele traiectoriei în care modulul vitezei este $|\vec{v}| = 9$ m/s.

β) Să se afle accelerația tangențială și cea normală în aceleași puncte.

γ) Să se calculeze raza de curbură și raza de torsiune ale traiectoriei în aceste puncte.

Examen, Institutul de transporturi, anul II, 1952

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

4) Fie $\vec{r}(t) = a \cos t \cdot \vec{i} + b \sin t \vec{j} + c \cos t \cdot \vec{k}$ (cu a,b,c constante date) vectorul de poziţie al unui punct mobil $M \in \mathbb{R}^3$. Să se arate că

a) $(\vec{r}(t))^2 + (\vec{v}(t))^2 = \text{constant}$

b) $\vec{a}(t)$ este paralel cu $\vec{r}(t)$

c) $\vec{v} \times \vec{r} = \vec{q}$, $\vec{q}$ un vector constant.

d) traiectoria punctului M este plană.

113) 1) Dacă o bară rectilinie rigidă se mişcă oricum în spaţiu, atunci vitezele tuturor punctelor barei au aceeaşi proiecţie pe direcţia barei, în orice moment t.

2) Fie P un punct material care execută o mişcare dată de legea $\vec{r} = \vec{r}(t)$, a.î. vectorii $\vec{v}$, $\vec{a}$ şi $\dot{\vec{a}}$ sînt coplanari. Arătaţi atunci că orice derivată a acceleraţiei $\vec{a}$, anume $\vec{a}^{(k)}(t)$, $k = 2,3,\ldots$, se găseşte în planul în care se află şi $\vec{v}, \vec{a}$ şi $\dot{\vec{a}}$.

3) Fie P un punct material care execută o mişcare dată de legea $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Dacă vectorii $\vec{r}$, $\vec{v}$ şi $\vec{a}$ sînt coplanari, atunci $\vec{r}$ rămîne paralel cu un plan fix.

114. 1) Fie A, B, C trei puncte din $\mathbb{R}^3$, de vectori de poziţie:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k},$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_B = \vec{i} + 2\vec{k},$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

faţă de un reper Oxyz.

La momentul t = 0 un punct P pleacă din B într-o mişcare rectilinie şi uniformă, cu viteza 1 m/s, descriind dreapta BC, de la B către C.

α) Să se afle vectorul de poziţie al lui P faţă de O mai întîi şi apoi faţă de A, la momentul t.

β) Să se calculeze $\cos(\widehat{PAB})$ în funcţie de t.

2) Un punct P execută o mişcare elicoidală uniformă, cu viteza v, după o elice cilindrică de rază R şi pas p.

Să se determine proiecţiile vitezei, ale acceleraţiei şi raza de curbură a traiectoriei.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

115. 1) Un punct se mişcă uniform pe elicea circulară

$$\begin{cases} x = 2\cos 4t \\ y = 2\sin 4t \\ z = 2t; \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Să se afle viteza, acceleraţia şi raza de curbură a traiectoriei.

2) Fie curba (C) din $\mathbb{R}^3$, dată prin ecuaţia vectorială

$$\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} + (\ln t)\cdot\vec{k}, \quad t \in (0, +\infty).$$

Dacă admitem că $\vec{r}(t)$ e vectorul de poziţie al unui punct material care se mişcă în spaţiu, să se determine viteza şi acceleraţia punctului.

b) Să se găsească ecuaţiile muchiilor şi ale feţelor triedrului lui Frenet în punctul (2, 1, 0), adică la momentul $t = 1$.

3.5.3. Rezolvarea problemelor

112. 1) Proiecţiile vitezelor şi ale acceleraţiilor cerute se calculează imediat:

Pentru P:
$$\begin{cases} \dot{x} = 35 \\ \dot{y} = At \\ \dot{z} = 2Ct^3 + \frac{Dt}{2}; \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = A \\ \ddot{z} = 6\,ct^2 + \frac{D}{2}; \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Pentru Q:
$$\begin{cases} \dot{x} = -40\sin(8t) \\ \dot{y} = 25 \\ \dot{z} = -7.e^{-t}, \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = -320\cos(8t) \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 7.e^{-t}, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Pentru R:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2t\sin 6t + 6t^2\cos 6t \\ \dot{y} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\operatorname{tg} 5t + 5\sqrt{t}\,(1 + \operatorname{tg}^2 5t) \\ \dot{z} = \frac{A}{t}, \quad t > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\sin(6t) + 24t\cos(6t) - 36\,t^2\sin(6t) \\ \ddot{y} = -\frac{1}{4t^{3/2}}\operatorname{tg} 5t + \frac{5}{\sqrt{t}}(1+\operatorname{tg}^2 5t) + 5t\operatorname{tg} 5t(1+\operatorname{tg}^2 5t) \\ \ddot{z} = -\frac{A}{t^2}, \quad t > 0. \end{cases}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Se ştie că <u>curba lui Viviani</u> este curba de intersecţie a sferei S(O,R) cu cilindrul circular drept având centrul pe Ox şi raza $\frac{R}{2}$, care are pe Oz drept generatoare, O fiind centrul sferei S. Astfel e suficient să verificăm că

$$x^2+y^2+z^2 = R^2 \quad \text{şi} \quad (x-\frac{R}{2})^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

ceea ce se face imediat. Apoi, proiecţiile vitezei şi ale acceleraţiei se calculează cu uşurinţă:

$$\vec{v}: \begin{cases} \dot{x} = -R\omega \sin 2\omega t \\ \dot{y} = R\omega \cos 2\omega t; \\ \dot{z} = R\omega \cos \omega t, \ t \geq 0 \end{cases} \qquad \vec{a}: \begin{cases} \ddot{x} = -2\omega^2 R \cos 2\omega t \\ \ddot{y} = -4\omega^2 y \\ \ddot{z} = -\omega^2 z, \ t \geq 0. \end{cases}$$

3) α) Avem imediat $\dot{x} = 6t$, $\dot{y} = 3t^2$, $\dot{z} = 6$; $v = 3t^2+6$.

Dacă cerem $v = 9$ m/s, rezultă $t = 1$s.

Astfel în punctul (3,1,6) mobilul are viteza 9 m/s.

β) $\ddot{x} = 6$, $\ddot{y} = 6t$, $\ddot{z} = 0$; $a = 6\sqrt{1+t^2}$;

$a_\tau = \dot{v} = 6t$; $a_\nu^2 = a^2 - a_\tau^2 = 36$; $a_\nu = 6$ m/s^2.

In punctul (3,1,6) mobilul are

$a = 6\sqrt{2}$ m/s^2; $a_\tau = 6$ m/s^2, $a_\nu = 6$ m/s^2.

γ) Raza de curbură o deducem din relaţia $\rho_c = \frac{v^2}{a_\nu}$ şi ea este $\rho_c = \frac{(3t^2+6)^2}{6}$.

Pentru $t = 1$ în P(3,1,6) traiectoria are raza de curbură $\rho_c = 13{,}5$ m.

Pentru calculul razei de torsiune folosim relaţia II, (7) din Anexa matematică.

4) a) Vectorul viteză rezultă din derivarea lui $\vec{r}(t)$ în raport cu t:

$$\vec{v} = -a \sin t\vec{i} + b \cos t\vec{j} - c \sin t\vec{k}.$$

Pătratul modulului lui $\vec{r}$ este $r^2(t) = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t + c^2\cos^2 t$, iar cel al lui $\vec{v}$ este $v^2(t) = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t + c^2\sin^2 t$.

De aici găsim imediat $r^2(t) + v^2(t) = a^2+b^2+c^2 = \text{constant}$.

b) Derivăm pe $\vec{v}$ în raport cu t şi găsim acceleraţia

$$\vec{a} = -a \cos t\vec{i} - b \sin t\vec{j} - c \cos t\vec{k} = -\vec{r},$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

relaţie care ne arată că $\vec{a}$ este coliniar cu $\vec{r}$.

c) Produsul $\vec{v} \times \vec{r}$ este

$$\vec{v} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin t & b \cos t & -c \sin t \\ a \cos t & b \sin t & c \cos t \end{vmatrix} = bc\vec{i} + o.\vec{j} - ab\vec{k}$$

şi deci $\vec{q} = bc\vec{i} - ab\vec{k} = \overrightarrow{\text{constant}}$.

d) Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului M sînt

$$x(t) = a \cos t,\ y(t) = b \sin t,\ z(t) = c \cos t,\ t \geqslant 0,$$

iar cele carteziene

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \quad \text{şi} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

acestea din urmă ne arată că traiectoria punctului M e plană deoarece rezultă din intersecţia planului $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ ce trece prin axa Oy cu cilindrul eliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

113. 1) Notăm bara cu AB şi cu $\vec{r}_0(t)$ vectorul de poziţie al unui punct M_0 al barei şi cu $\vec{r}(t)$ vectorul de poziţie al unui alt punct M al barei în mişcare, ambii vectori de poziţie fiind presupuşi de clasa C^1 (vedeţi figura 3.22.).

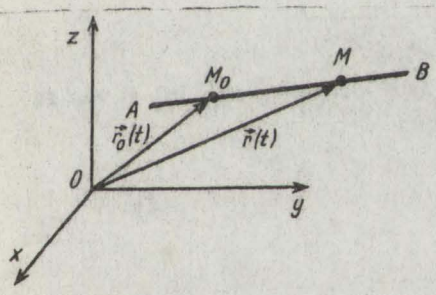


Fig.3.22.

Bara fiind rigidă, rezultă că

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \overrightarrow{M_0M}^2 = \text{constant}.$$

Derivăm această relaţie şi găsim:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_0) = 0 \quad \text{sau}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \dot{\vec{r}} = \overrightarrow{M_0M} \cdot \dot{\vec{r}}_0 . \qquad (1)$$

In (1) împărţim cu M_0M şi notăm

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_0M}}{M_0M} .$$

Atunci relaţia (1) devine

$$\vec{u}.\dot{\vec{r}}(t) = \vec{u}\dot{\vec{r}}_0(t) \quad \text{sau} \quad \text{Pr}_{AB}\dot{\vec{r}}(t) = \text{Pr}_{AB}\dot{\vec{r}}_0(t),$$

adică proprietatea din enunţ.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Coplanaritatea celor trei vectori $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\dot{\vec{a}}$ implică (1) $(\vec{v}, \vec{a}, \dot{\vec{a}}) = 0$, respectiv (dacă derivăm (1) în raport cu t) $(\vec{a}, \vec{a}, \dot{\vec{a}}) + (\vec{v}, \dot{\vec{a}}, \dot{\vec{a}}) + (\vec{v}, \vec{a}, \ddot{\vec{a}}) = 0$ sau $(\vec{v}, \vec{a}, \ddot{\vec{a}}) = 0$, adică $\ddot{\vec{a}}$ e coplanar cu $\vec{v}$ și $\vec{a}$. Mai departe se poate folosi inducția matematică după k.

3) Coplanaritatea celor trei vectori $\vec{r}$, $\vec{v}$ și $\vec{a}$ implică: $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î. $\vec{a} = \alpha\vec{r} + \beta\vec{v}$, care implică $\vec{r}\times\vec{a} = \beta\vec{r} \times \vec{v}$ sau $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \beta(\vec{r}\times\vec{v})$. Deci derivata vectorului $\vec{r}\times\vec{v}$ este coliniară cu $\vec{r}\times\vec{v}$ însuși. Înseamnă că $\vec{r}\times\vec{v} = \lambda(t)\vec{A}$, unde $\vec{A}$ este un vector constant: deci $\vec{r} \perp \vec{A}$ și $\vec{A}$ poate fi privit ca un vector normal al unui fascicul de plane paralele. Din $\vec{r} \times \vec{v} = \lambda\vec{A}$ deducem $\vec{r}\vec{A} = 0$ și $\vec{r}$ este paralel cu fasciculul de plane paralele de vector normal $\vec{A}$.

114. 1) $\mathcal{L}$) Fie $P(x,y,z)$ punctul mobil. Întrucît $P \in BC$, coordonatele lui verifică ecuațiile dreptei BC:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} = \lambda.$$

Deci $x = 1 + 2\lambda$, $y = 2\lambda$; $z = 2 + \lambda$, λ parametru variabil.

Cum x,y,z sînt funcții de t, înseamnă că λ este funcție de t, derivabilă pe un interval I ca și coordonatele însele.

Acum componentele vitezei vor fi

$$\dot{x} = 2\dot{\lambda},\ \dot{y} = 2\dot{\lambda},\ \dot{z} = \dot{\lambda} \quad \text{și} \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 1;$$

deci $\dot{\lambda} = \frac{1}{3}$ și prin urmare $\lambda = \frac{t}{3} + C$ (1). Acum coordonatele lui P vor fi

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{3} + 2C + 1 \\ y = \frac{2t}{3} + 2C \\ z = 2 + \frac{t}{3} + C. \end{cases} \qquad (2)$$

Dacă avem în vedere că la $t = 0$ avem $P = B$, atunci din (2) găsim $C = 0$.

Astfel obținem

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = (\frac{2t}{3} + 1)\vec{i} + \frac{2t}{3}\vec{j} + (2 + \frac{t}{3})\vec{k},$$

respectiv

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\vec{r}_{AP} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \frac{2t}{5}\vec{i} + (\frac{2t}{5} - 1)\vec{j} + (1 + \frac{t}{5})\vec{k}.$$

β) Pentru a afla $\measuredangle \theta = \measuredangle PAB$, facem produsul scalar $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB}$, unde $\overrightarrow{AB} = -\vec{j} + \vec{k}$.

Avem

$$\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} = 1 - \frac{2t}{5} + 1 + \frac{t}{5} = \sqrt{(\frac{2t}{5})^2 + (\frac{2t}{5} - 1)^2 + (\frac{t}{5} + 1)^2}.\sqrt{2}\cos\theta,$$

de unde

$$\cos\theta = \frac{6 - t}{\sqrt{18.t^2 - 12.t + 36}}.$$

2) Ecuațiile de mișcare ale punctului P sînt:

(1) $x = R\cos\theta(t)$, $y = R\sin\theta(t)$, $z = k\theta(t)$, $\theta(.): I \longrightarrow \mathbb{R}$, de clasă $C^2(I)$. Dacă scriem că atunci cînd θ crește cu 2π cota z a punctului P crește cu pasul p, găsim $k = \frac{p}{2\pi}$

Deci ecuațiile (1) se mai scriu:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = R\cos\theta(t) \\ y = R\sin\theta(t) \\ z = \frac{p}{2\pi}\theta(t), \ t \in I \subset \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Mișcarea fiind uniformă, avem $v = const.$ Dar

$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}.\dot{\theta} = constant$. De aici deducem $\dot{\theta} = constant$ sau că $\theta(t)$ e o funcție afină:

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 \qquad (3)$$

Înlocuind în (2) pe $\theta(t)$ dat de (3), găsim imediat prin derivare proiecțiile vitezei pe axele de coordonate

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\omega_0\sin\theta(t) \\ \dot{y} = R\omega_0\cos\theta(t); \ v = \sqrt{R^2\omega_0^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\omega_0^2}; \ \omega_0 = \frac{v}{\sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}}; \\ \dot{z} = p\omega_0/2\pi \end{cases}$$

acum proiecțiile accelerației se obțin din proiecțiile vitezei printr-o nouă derivare în raport cu t:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\omega_0^2 \cos\theta(t) \\ \ddot{y} = -R\omega_0^2 \sin\theta(t) \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = R\omega_0^2 \\ a_\tau = \dot{v} = 0;\ a_\nu = \frac{v^2}{\rho_c},\ \rho_c = \frac{v^2}{a} = \frac{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}{R}. \\ a_\nu = a \end{cases}$$

115. 1) Proiecţiile vitezei pe cele trei axe Ox, Oy şi Oz sînt:

$$\begin{cases} v_x\,t = \dot{x} = -8 \sin 4t \\ v_y\,t = \dot{y} = 8 \cos 4t \\ v_z\,t = \dot{z} = 2,\ t \geq 0 \end{cases} \qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 68$$

Proiecţiile acceleraţiei pe cele trei axe sînt

$$\begin{cases} a_x\,t = \ddot{x} = -32 \cos 4t \\ a_y\,t = \ddot{y} = -32 \sin 4t; \\ a_z\,t = \ddot{z} = 0,\ t \geq 0 \end{cases} \qquad a^2 = 32^2$$

Evident $a_\tau = \dot{v} = 0$; deci $a_\nu = a = 32\ m/s^2$.

Din formula $a_\nu = \frac{v^2}{\rho_c}$, rezultă $\rho_c = \frac{68}{32} = \frac{17}{8}$ metri = 2,125 metri.

2) a) Componentele vitezei sînt:

$\dot{x} = 2$; $\dot{y} = 2t$; $\dot{z} = \frac{1}{t}$; $v(t) = 2t + \frac{1}{t}$.

Pentru $t = 1$ avem $\dot{x} = 2$, $\dot{y} = 2$, $\dot{z} = 1$, $v = 3$.

Componentele acceleraţiei sînt:

$\ddot{x} = 0$; $\ddot{y} = 2$; $\ddot{z} = -\frac{1}{t^2}$; $a = \sqrt{4 + \frac{1}{t^4}}$.

Pentru $t = 1$, găsim $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 2$, $\ddot{z} = -1$, $a = \sqrt{5}$.

b) Versorul $\overline{\tau}$ al tangentei în punctul (2,1,0) este

$$\overline{\tau} = \frac{\dot{x}(1)}{v(1)}\overline{i} + \frac{\dot{y}(1)}{v(1)}\overline{j} + \frac{\dot{z}(1)}{v(1)}\overline{k} = \frac{2}{3}\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k},$$

iar ecuaţiile tangentei se scriu imediat

$$\frac{x-2}{\frac{2}{3}} = \frac{y-1}{\frac{2}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \quad \text{sau} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Normala principală se află în planul determinat de vectorul viteză şi vectorul acceleraţiei. De aceea binormala va avea versorul

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k},$$

iar normala principală va avea şi ea versorul

$$\vec{\nu} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\beta} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Acum ecuaţiile normalei principale şi ale binormalei vor fi:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \quad \text{(ecuaţiile normalei principale)}$$

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \quad \text{(ecuaţiile binormalei);}$$

Cunoscînd vectorii normali pe feţele triedrului Frenet, ecuaţiile acestor feţe, care trec prin punctul (2,1,0), vor fi pentru:

Planul osculator: $(x-2)(-2)+(y-1).1+z.2 = 0$ sau $2x-y-2z-3 = 0$.

Planul normal: $(x-2)2+(y-1)2+z = 0$ sau $2x+2y+z-6 = 0$.

Planul rectificant: $(x-2).1+(y-1)(-2)+z.2 = 0$ sau $x-2y+2z=0$.

§. 3.6. Hodografe

3.6.1. Rezumat teoretic

1. Hodograful vitezei unui punct M care se mişcă pe o curbă (C) este locul geometric descris de vîrful vectorilor viteză aşezaţi, prin echipolenţă, cu originea lor într-un punct fix $O' \in \mathbb{R}^3$ sau chiar în originea O a reperului faţă de care e raportată mişcarea punctului M.

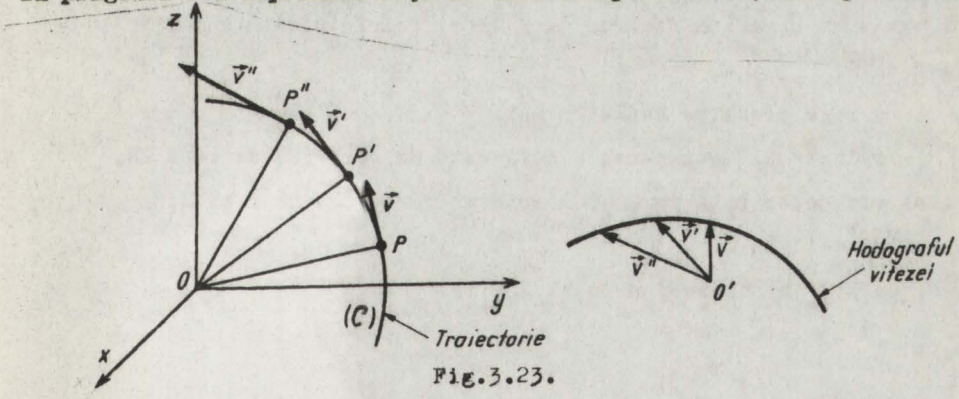


Fig.3.23.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2. Ecuaţiile parametrice ale hodografului vitezei sînt:

$$\begin{cases} \xi = \dot{x}(t) \\ \eta = \dot{y}(t) \\ \zeta = \dot{z}(t), \ t \in I = [0,T] \end{cases}$$

3.6.2. Probleme

116. 1) Care este hodograful vitezelor:

a) Intr-o mişcare rectilinie şi uniformă?

b) Intr-o mişcare rectilinie şi uniform accelerată?

c) Intr-o mişcare uniformă pe un cerc?

d) Care este hodograful vitezei într-o aruncare oblică, în plan în care $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$?

2) Un punct P se mişcă pe parabola $y = \frac{x^2}{2q}$, a.î. hodograful vitezei este dreapta de ecuaţie

$$y = mx + n.$$

Să se determine ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului.

3) Un punct M descrie parabola $y^2 = 2px$, iar vîrful vitezei descrie tangenta în vîrful parabolei, adică dreapta de ecuaţie $x = 0$.

Să se determine ecuaţiile parametrice ale traiectoriei şi hodograful vitezei.

117. 1) Traiectoria unui punct este o parabolă P de focar F, iar hodograful vitezei relativ la vîrful O al acestei parabole este o parabolă P' egală cu P, avînd focarul în O şi vîrful în simetricul O' al lui F faţă de O.

Să se afle mişcarea acelui punct.

2) Traiectoria unui punct P(X,Y) este un cerc (C) de rază 2R, iar hodograful vitezelor faţă de $O \in (C)$ este un cerc (C') de rază R, tangent primului cerc în O.

Să se afle mişcarea punctului P(X,Y).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Un punct material M(X,Y) descrie parabola $Y^2 = 2pX$, cu P strict pozitiv. Hodograful vitezei față de O e parabola $y^2 = 2qx$. La momentul $t = 0$ avem $Y(0) = p$. Să se afle ecuațiile parametrice ale traiectoriei și locul geometric descris de extremitatea vectorului viteză.

3.6.3. Rezolvarea problemelor

116. 1) a) $x = x_0 + v_0 t$; $v(t) = v_0$. Hodograful vitezei este un punct, $\forall t \geq 0$.

b) $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$; $v(t) = v_0 + at$, $t \geq 0$.

Hodograful vitezei este o semidreaptă.

c) $v = R\omega$ = constant. Hodograful vitezei e un cerc de rază $R\omega$.

d) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \cdot \vec{g}t^2$;

$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, $t \geq 0$.

Hodograful vitezei este o semidreaptă verticală (vedeți figura alăturată).

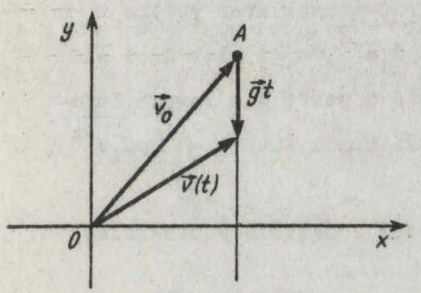


Fig.3.24.

2) Fie $\vec{v}$ vectorul viteză a punctului P, de proiecții $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$. Atunci avem $\dot{y} = m\dot{x} + n$ și de aici

$$y = mx + nt + C_1 \qquad (1)$$

Din $x^2 = 2qy$, prin derivare, găsim:

$$x\dot{x} = q\dot{y}$$

sau

$$x\dot{x} = q(m\dot{x} + n)$$

Integrăm și obținem

$$x^2 = 2\,qmx + 2\,qnt + C_2 \qquad (2)$$

Ecuațiile (1) și (2) împreună cu condițiile inițiale constituie o problemă de funcții implicite și ne definesc traiectoria sub formă parametrică:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2) \\ y = \psi(t, C_1, C_2), \ t \in I. \\ x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0 . \end{cases}$$

3) Conform enunţului avem

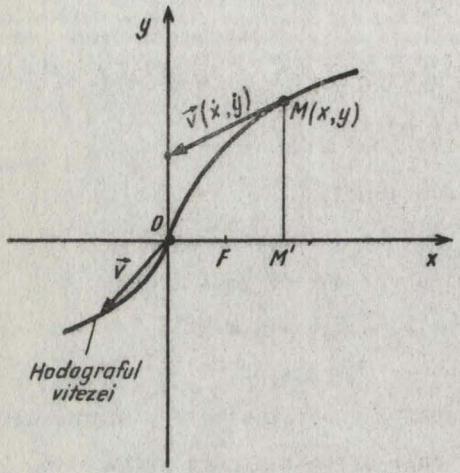


Fig.3.25.

$$\dot{x} = -x$$

De aici integrăm şi găsim

$$x(t) = C_1 e^{-t}, \ t \in [0,T] = I.$$

Dacă punctul M descrie o parte din ramura superioară a parabolei, atunci avem $y(t) = \sqrt{2pC_1 e^{-t}}$, $t \in I$, iar dacă el descrie o parte din ramura inferioară atunci $y(t) = -\sqrt{2pC_1 e^{-t}}$, $t \in I$.

Deci ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sînt

$$(1) \quad \begin{cases} x = C_1 e^{-t} \\ y = \sqrt{2px}, \ t \in I \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = C_1 e^{-t} \\ y = -\sqrt{2px}, \ t \in I. \end{cases} \quad (2)$$

Pentru a determina proiecţiile vitezei, observăm că

$$\dot{x}(t) = -x(t)$$

iar pe $\dot{y}(t)$ îl deducem din $y^2 = 2px$ prin derivare în raport cu t; rezultă $y\dot{y} = p\dot{x}$ şi deci

$$\dot{y}(t) = \frac{-px}{y} = -\frac{p}{y} \cdot \frac{y^2}{2p} = -\frac{y(t)}{2}$$

Final $\vec{v}(t)$ are proiecţiile:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\mathcal{V}(t):\ \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t)\ \left(= -\frac{Y^2}{2p}\right), & (3) \\ \dot{y}(t) = -\frac{Y(t)}{2},\ t \in I. & (4) \end{cases}$$

Pentru a afla ecuaţia cartezianã a hodografului vitezei, eliminăm pe y între relaţiile (3) şi (4).

Găsim $(\dot{y})^2 = -\frac{p\dot{x}}{2}$, care e o parabolă dedusă din traiectoria $y^2 = 2px$ printr-o simetrie faţă de Oy, urmată de o contracţie în raportul $\frac{1}{2}$ după y.

117. 1) Fie parabola P de ecuaţie $Y^2 = 2pX$. (1)

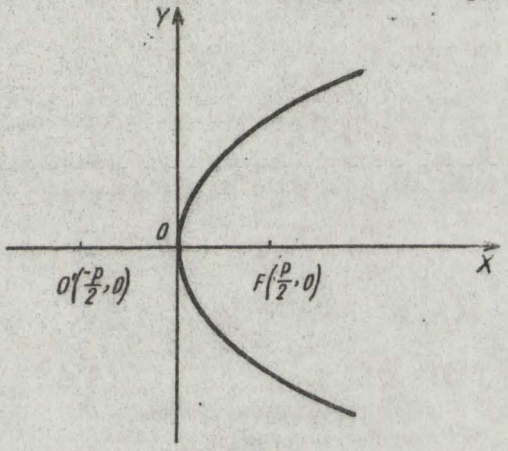


Fig.3.26.

Ecuaţia parabolei P' va fi

$$y^2 = 2p(x + \frac{p}{2}) \text{ sau } y^2 = 2px + p^2 \qquad (2)$$

Din (1), prin derivare în raport cu t, deducem

$$Y\frac{dY}{dt} = p\frac{dX}{dt}. \qquad (3)$$

Ecuaţia parabolei P' trebuie să fie verificată de proiecţiile vitezei $\frac{dX}{dt}$ şi $\frac{dY}{dt}$; deci trebuie să avem

$$\left(\frac{dY}{dt}\right)^2 = 2p\frac{dX}{dt} + p^2. \qquad (4)$$

Dacă între relaţiile (3) şi (4) eliminăm pe $\frac{dX}{dt}$, atunci găsim o ed pentru Y(t) şi anume

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$(Y')^2 = 2YY' + p^2.$$

Rezolvînd această ecuaţie diferenţială neliniară în raport cu Y' deducem $Y' = Y + \sqrt{Y^2 + p^2}$ sau $Y' = Y - \sqrt{Y^2 + p^2}$

Să considerăm prima ecuaţie diferenţială, pe care o scriem şi astfel:

$$dt = \frac{dY}{Y + \sqrt{Y^2 + p^2}} \quad \text{sau} \quad dt = \frac{Y - \sqrt{Y^2 + p^2}}{Y^2 - Y^2 - p^2}\, dY$$

sau

$$dt = -\frac{1}{p^2} Y dY + \frac{1}{p^2}\sqrt{Y^2+p^2}\, dY;$$

acum integrăm şi obţinem

$$t + C_1 = -\frac{Y^2}{2p^2} + \frac{1}{p^2}\left[\frac{Y}{2}\sqrt{Y^2+p^2} + \frac{p^2}{2}\ln\frac{Y+\sqrt{Y^2+p^2}}{p}\right]. \qquad (5)$$

Dacă $Y(0) = 0$, din (5) găsim $C_1 = 0$ şi deci

$$t = \frac{1}{2}\ln\frac{Y+\sqrt{Y^2+p^2}}{p} + \frac{1}{2p^2}\left[Y\sqrt{Y^2+p^2} - Y^2\right]. \qquad (6)$$

Acum determinarea lui $Y = \varphi(t)$ s-a redus la rezolvarea problemei de funcţii implicite (6).

O dată $\varphi(t)$ cunoscut, deducem imediat

$$X(t) = \frac{\varphi^2(t)}{2p} \qquad (7)$$

Prin urmare ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului considerat vor fi

$$X(t) = \frac{\varphi^2(t)}{2p}, \quad Y(t) = \varphi(t), \quad t \in I.$$

2) Fie (C') cercul tangent la (C) în O în interior.

Alegem axele de coordonate din figură şi atunci cercul (C') are ecuaţia (vedeţi figura 3.27.).

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0.$$

Punctul P va avea coordonatele

$$\begin{cases} X = 2R + 2R\cos\varphi(t) \\ Y = 2R\sin\varphi(t), \quad \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ derivabilă.} \end{cases}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

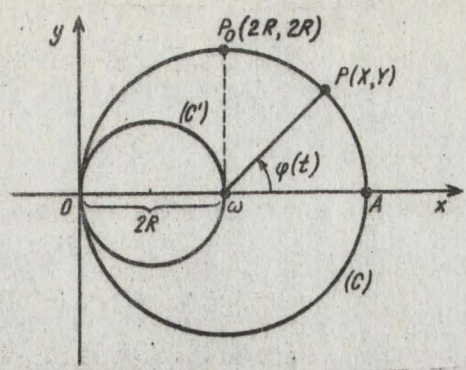


Fig.3.27.

Acum viteza lui P va avea proiecţiile:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -2R \cdot \sin\varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \\ \frac{dY}{dt} = 2R \cdot \cos\varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t), \end{cases}$$

Cercul hodograf trebuie să fie verificat de coordonatele vitezei $\dot{X}$ şi $\dot{Y}$; deci trebuie să avem

$$4R^2 \sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + 4R^2 \cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + 4R^2 \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} = 0.$$

sau

$$(\dot{\varphi} + \sin\varphi) \cdot \dot{\varphi} = 0.$$

De aici obţinem sau $\dot{\varphi} = 0$, φ = const. şi P imobil, caz care nu interesează, sau

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sin\varphi \text{ sau } \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = -dt, \quad \sin\varphi \neq 0, \varphi \in (0, \pi).$$

Integrînd ultima ecuaţie diferenţială găsim pe t în funcţie de φ:

$$t = \ln\left|\frac{C}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\right|.$$

Să admitem că la t = 0, mobilul se află în P_0 (2R, 2R); această poziţie iniţială corespunde lui $\varphi(0) = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Rezultă C = 1 şi $t = \ln\left|\operatorname{etg}\frac{\varphi}{2}\right|$.

Cda. 236/987 Fasc. 4

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Mobilul se îndreaptă de la P_0 spre $A(\varphi = 0)$, unde el nu ajunge niciodată.

Cum $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} > 0$, avem $t = \ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = e^t$, $\frac{\varphi}{2} = \operatorname{arcctg} e^t$, $\varphi = 2 \operatorname{arcctg} e^t$, respectiv

$$\begin{cases} X(t) = 2R + 2R \cos(2 \operatorname{arcctg} e^t) \\ Y(t) = 2R \sin (2 \operatorname{arcctg} e^t), \ t \in I. \end{cases}$$

Dacă (C) şi (C') sînt tangente exterior, avem situaţia din figura alăturată, iar ecuaţia hodografului va fi (vedeţi figura 3.28.).

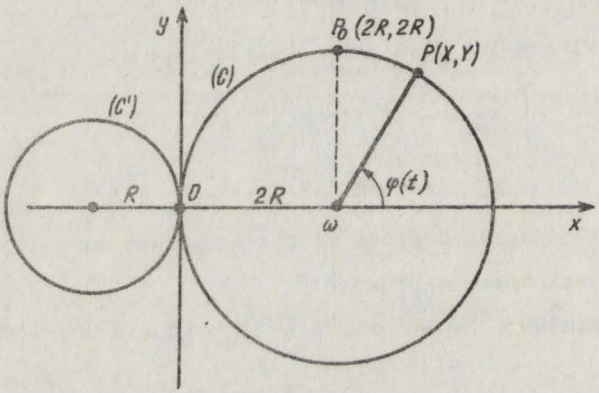


Fig.3.28.

$$x^2 + y^2 + 2Rx = 0$$

şi se procedează analog; se găseşte $\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi$, de unde $t = \ln\left|K \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|$.

Dacă P pleacă din $P_0(2R, 2R)$, legea de mişcare este

$$t = \ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = e^t, \ \varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} e^t, \ t \in I$$

şi mobilul se îndreaptă din P_0 către O, unde nu ajunge decît la capătul unui timp infinit.

3) Fie $\dot{X}(t)$ şi $\dot{Y}(t)$ proiecţiile vitezei punctului M pe axele de coordonate. Ele sînt soluţia sistemului

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\begin{cases} \dot{Y}^2(t) = 2q\,\dot{X}(t) \\ Y(t)\dot{Y}(t) = p\dot{X}(t) \end{cases}$$ (ed obținută din $Y^2 = 2pX$ prin derivare după t).

Rezultă $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{2q}{p}$, de unde $Y(t) = Ce^{\frac{2q}{p}t}$; din $Y(0) = p$, găsim $Y(t) = p.e^{\frac{2q}{p}t}$. Apoi din ecuația parabolei $Y^2 = 2pX$ deducem pe X. Astfel ecuațiile parametrice ale traiectoriei vor fi

$$(1) \qquad \begin{cases} X(t) = \frac{p}{2} e^{\frac{4q}{p}t} \\ Y(t) = p \cdot e^{\frac{2q}{p}t} \end{cases}, \quad t \in I$$

Proiecțiile vectorului viteză se deduc din (1) prin derivare în raport cu t:

$$(2) \qquad \dot{X}(t) = 2q\, e^{\frac{4q}{p}t}, \quad \dot{Y}(t) = 2q\, e^{\frac{2q}{p}t}, \quad t \geq 0.$$

Extremitatea vectorului viteză va avea coordonatele ξ și η date de

$$\xi = X(t) + \dot{X}(t)$$
$$\eta = Y(t) + \dot{Y}(t)$$

sau

$$\begin{cases} \xi(t) = (\frac{p}{2} + 2q)e^{\frac{4q}{p}t} \\ \eta(t) = (p+2q)\, e^{\frac{2q}{p}t} \end{cases}, \quad t \geq 0$$

Rezultă de aici, printr-o analiză atentă, că locul vîrfului vectorului viteză va fi inclus în mulțimea punctelor de coordonate (ξ, η) din $\mathbb{R}^2$ pentru care avem

$$\eta^2 = 2\,\frac{(p+2q)^2}{(p+4q)} \cdot \xi .$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

PARTEA A III-A

DINAMICA

CAPITOLUL IV

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

§ 4.1. Principiile mecanicii

Newton (în "Philosophiae naturalis principia mathematica") a enunţat pentru prima oară principiile mecanicii, pe care le-a numit "Axiomele sau legile mişcării" sub forma:

I. Principiul inerţiei sau Legea I:

Orice corp îşi păstrează starea sa de repaus sau de mişcare uniformă în linie dreaptă, atîta timp cît nu intervine nici o forţă imprimată care să-i modifice această stare.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statuum suum mutare.

II. Legea a II-a

Variaţia mişcării unui corp este proporţională cu forţa motoare imprimată şi este îndreptată după linia dreaptă după care acţionează forţa.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

III. Principiul acţiunii şi reacţiunii sau Legea a III-a

La orice acţiune corespunde totdeauna o reacţiune egală şi de sens contrar sau acţiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale şi îndreptate în sensuri contrare.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

La aceste legi Newton adaugă mai multe corolarii, dintre care menţionăm.

IV. Corolarul I: Un corp sub acţiunea a două forţe concurente descrie diagonala unui paralelogram în acelaşi timp în care ar descrie laturile sub acţiunile separate ale forţelor.

§ 4.2. Teoreme generale în dinamica punctului material

I. Teorema impulsului: $\dot{\vec{H}} = \vec{F}$, i.e.: Derivata în raport cu timpul a impulsului $\vec{H} = m\vec{V}$ a unui punct material de masă m este egală cu rezultanta $\vec{F}$ a forţelor care acţionează asupra punctului.

II. Teorema momentului cinetic: $\dot{\vec{K}} = \vec{r} \times \vec{F}$, i.e.:

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic $\vec{K} = \vec{r} \times \vec{H}$ a unui punct material de masă m este egală cu momentul rezultantei $\vec{F}$ a forţelor aplicate punctului.

III. Teorema energiei: $d(\frac{mV^2}{2}) = dL$, i.e.:

Diferenţiala energiei cinetice $\frac{mV^2}{2}$ a unui punct material de masă m este egală cu lucrul mecanic elementar efectuat de forţa rezultantă aplicată punctului în intervalul de timp dt.

Observaţie. În cazul $\vec{F} = \vec{0}$, avem $\dot{\vec{H}} = \vec{0}$, adică $\vec{H} = \overrightarrow{const.}$ (teorema de conservare a impulsului). Dacă $\vec{F} \times \vec{r} = \vec{0}$, atunci $\vec{K} = \overrightarrow{const.}$ şi are loc o teoremă de conservare a momentului cinetic. Dacă $dL = 0$, atunci $\frac{mV^2}{2} = const.$ şi avem o teoremă de conservare a energiei cinetice.

§ 4.3. Teoreme generale în dinamica sistemelor de puncte materiale

Fie un sistem de n puncte materiale $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$ şi vectori de poziţie $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$; fie $\vec{F}_i$ rezultanta forţelor

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

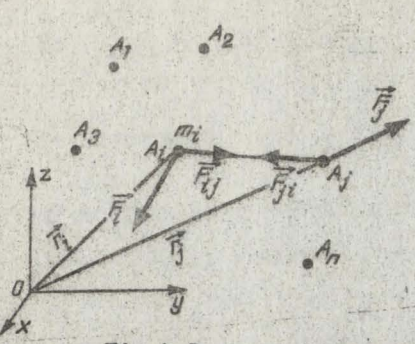


Fig.4.1.

exterioare aplicate punctului A_i şi $F_{i1},\dots,F_{in}$ forţele interioare care exprimă acţiunea tuturor celorlalte puncte din sistem asupra lui A_i.

Cea de a doua lege a lui Newton pentru punctele din sistem se scrie:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n}$$
$$\vdots$$
$$m_n\ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \dots + \vec{F}_{n,n-1}$$

$$\vec{H}_i = m_i\vec{v}_i.$$

I. <u>Teorema impulsului</u>: $\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{H}_i\right) = \sum\vec{F}_i$, i.e.:

Derivata în raport cu timpul a impulsului total al sistemului de puncte materiale este egală cu rezultanta tuturor forţelor exterioare aplicate.

I'. Dacă introducem vectorul de poziţie $\vec{\rho}$ al centrului de masă al sistemului de puncte considerat, atunci $M\vec{\rho} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$, $M\dot{\vec{\rho}} = \vec{H}$ şi teorema impulsului ia forma teoremei mişcării centrului de masă al unui sistem de puncte materiale, sub forma

$$M\ddot{\vec{\rho}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i,$$

i.e.: Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale are o mişcare identică cu aceea a unui punct material având o masă egală cu masa întregului sistem, asupra căruia acţionează rezultanta forţelor exterioare transportate echipolent în punctul respectiv.

II. Teorema momentului cinetic: $\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{H}_i\right) =$

$= \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{F}_i$, i.e.:

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total $\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{H}_i$ al unui sistem de puncte materiale este egală cu suma momen-

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

telor forţelor exterioare care acţionează asupra sistemului de puncte materiale.

III. Teorema energiei: $d(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2) = dL_{ext} + dL_{int}$, cu $dL_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{r}_i$ şi $dL_{int} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} d\vec{r}_{ij}$, i.e.: Diferenţiala energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu lucrul mecanic elementar al tuturor forţelor exterioare şi interioare, care acţionează asupra sistemului de puncte materiale.

Observaţie. In cazul unui sistem rigid avem $dL_{int} = 0$.

§ 4.4. Mişcarea unui punct material sub acţiunea unor forţe nule, constante, care depind numai de timp, poziţie, viteză sau sub acţiunea greutăţii în vid

4.4.1. Rezumat teoretic

1. A determina mişcarea unui punct sub acţiunea unei forţe nule înseamnă a rezolva problema lui Cauchy:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{0},\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0,\ \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0.$$

Această problemă are soluţia unică

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0;\quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0,\quad t \in [0,T]$$

Astfel traiectoria punctului e dreapta de ecuaţii scalare

$$\frac{x-x_0}{v_{0x}} = \frac{y-y_0}{v_{0y}} = \frac{z-z_0}{v_{0z}},$$

care trece prin punctul (x_0, y_0, z_0) de vector de poziţie $\vec{r}_0$ şi care are direcţia dată de $\vec{v}_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$.

2. A determina mişcarea unui punct material greu sub acţiunea forţei $\vec{F} = m\vec{g}$ înseamnă a rezolva problema lui Cauchy

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g},\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0,\ \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0.$$

Această problemă are soluţia unică

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ (ecuaţia curbei balistice)

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \quad t \in [0,T].$

Traiectoria e o <u>parabolă</u>.

Cazuri particulare importante: mişcarea pe verticală în sus sau în jos.

3. Intr-o mişcare ascendentă a unui punct material P, pe verticală, începută din punctul O cu viteza iniţială v_0, de la suprafaţa Pământului, avem:

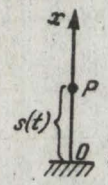


Fig.4.2.

$$a = -g;\ v = v_0 - gt;\ s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2;$$

$$t_{urcare} = \frac{v_0}{g} \quad şi$$

$$s_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

4. Intr-o mişcare descendentă a unui punct material P, pe verticală, începută din punctul P_0 cu viteza iniţială v_0 de la înălţimea h deasupra Pământului, avem:

$$a = g;\ v = v_0 + gt;\ s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2.$$

5. In aruncarea oblică a unui punct material P din O, sub unghiul α în cîmpul gravitaţional al Pământului, în vid, cu viteza iniţială $\vec{v}_0$, avem:

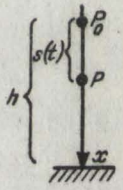


Fig.4.3.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g; \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt; \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

1) Ecuaţia carteziană a traiectoriei este:

$$y = x\,tg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

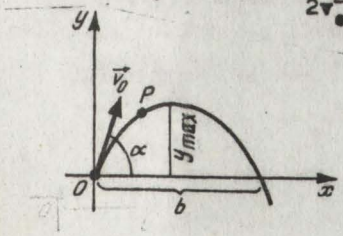


Fig.4.4.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Săgeata y_{max} este $y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

3) Bătaia b este $b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

6. Accelerația de frînare a unui punct material greu care urcă pe un plan înclinat cu unghiul α în prezența frecării cu coeficientul de frecare μ este

$$a = g(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)$$

7. Accelerația de frînare a unui punct material greu care coboară pe un plan înclinat cu unghiul α în prezența frecării cu coeficientul de frecare μ este

$$a = g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha).$$

8. Spunem că un punct material are o mișcare uniformă pe traiectoria sa, dacă modulul vitezei sale, v, este constant.

4.4.2. Probleme

118. 1) Intr-o mișcare rectilinie o forță de mărime F imprimă unui corp de masă m_1 o accelerație a_1, iar unui corp de masă m_2 accelerația a_2. Ce accelerație a va imprima aceeași forță unui corp avînd masa $m_1 + m_2$?

2) O forță constantă de intensitate F newtoni a acționat asupra unui corp un timp egal cu t secunde și i-a comunicat acestuia într-o mișcare rectilinie o energie cinetică E_c. Determinați masa corpului.

Aplicație: F = 2 N, t = 4 secunde, E_c = 6,4 J.

119. 1) O coloană de militari avînd lungimea l = 2 km se deplasează cu viteza v = 9 km/h. Comandantul militarilor, care se află în fruntea coloanei, trimite un motociclist cu un ordin către adjunctul său din spatele coloanei. Motociclistul merge cu viteza V = 27 km/h, predă ordinul și se întoarce la comandant. In cît timp s-a reîntors motociclistul la comandantul său, după executarea ordinului?

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Un turist pleacă din localitatea A la ora 6 cu o bicicletă, pe un drum rectiliniu, pentru a ajunge într-un timp determinat în localitatea B.

El parcurge primii 1o km în 4o minute şi spune: dacă aş merge cu aceeaşi viteză aş ajunge cu 24 minute mai devreme în B, decît ar trebui să ajung; dacă aş micşora viteza cu 3 km/h, atunci tot aş ajunge mai devreme în B, dar numai cu 1o minute.

Să se afle distanţa dintre localităţile A şi B.

3) Un punct A de masă m_1 se află în originea O a unui reper ortogonal din $\mathbb{R}^2$, iar un alt punct B de masă m_2 se află pe axa Oy, la distanţa d de O.

La un moment dat luat ca moment iniţial, A începe să se mişte uniform cu viteza v_1 pe Ox, iar B similar cu viteza v_2 pe axa Oy. Dacă notăm cu $C(x^*,y^*)$ centrul maselor celor două puncte, aflaţi curba pe care se mişcă punctul C, precum şi viteza lui.

4) Un om se află la distanţa a de o şosea rectilinie (ş),pe care zăreşte un autobuz A venind cu viteza V. Sub ce „azimut" trebuie să-i iasă omul înaintea autobuzului pentru ca să-l întîlnească?

Se cunoaşte distanţa b dintre om şi autobuz la momentul iniţial, precum şi viteza cu care poate alerga omul, v ($aV \leqslant bv$).

Aplicaţie: a = 5o m, V = 5 m/s; b = 13o m, v = 3 m/s.

5) Două avioane încep să zboare din acelaşi punct, pe două trasee perpendiculare, unul cu viteza v_1 km/h, iar altul cu viteza v_2 km/h. Cum creşte cu timpul distanţa S dintre cele două avioane?Care este distanţa dintre cele două avioane, după ce primul avion a parcurs distanţa S_1?

Aplicaţie:pentru v_1 = 3oo km/h, v_2 = 4oo km/h şi S_1 = 12oo km.

6) Un pieton parcurge un drum rectiliniu cu viteza v = 5,4 km/h şi este urmărit de un biciclist care merge pe acelaşi drum dar cu viteza V = 14,4 km/h.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Ştiind că la pornire bicicliştul e în urma pietonului cu 175 m şi că amîndoi pornesc în acelaşi timp, să se calculeze:

a) Timpul după care bicicliştul îl ajunge pe pieton.

b) La ce distanţă de punctul de plecare e ajuns pietonul de către biciclist?

Examenul de admitere în Şcoala Politehnică, Bucureşti

120. 1) Două automobile se deplasează pe o şosea rectilinie, unul după altul. Primul automobil merge cu viteza v_1 = 80 km/h, iar al doilea cu v = 90 km/h. La un moment dat primul automobilist a frînat cu acceleraţia de 2,5 m/s^2.

Al doilea automobilist începe să frîneze la un interval de o secundă după primul, cu acceleraţia 2 m/s^2.

Ce distanţă trebuie să existe între cele două maşini în momentul în care prima maşină a început să frîneze, pentru ca atunci cînd ambele maşini s-au oprit, distanţa dintre ele să rămînă încă 10 metri?

Examenul de admitere, Şcoala Politehnică, Bucureşti

2) Două maşini auto M_1 şi M_2 pornesc în acelaşi timp din acelaşi loc în acelaşi sens pe un drum rectiliniu, prima cu viteza v_1 = 50 km/h, iar a doua cu viteza v_2 = 40 km/h.

După 30 minute porneşte, din acelaşi loc în acelaşi sens, o a treia maşină M_3 şi ajunge una din aceste maşini cu 1,5 ore mai tîrziu decît pe cealaltă.

Ce viteză v_3 are maşina a treia?

Olimpiada de fizică

121. 1) Un punct material M de masă egală cu unitatea se mişcă pe o linie dreaptă sub acţiunea unei forţe care depinde de viteză, F = f(v). Ştiind că spaţiul parcurs de M este $x = at + bt^2 + ct^3$, cu a, b, c constante fizice date, să se determine F = f(v).

2) Un corp de masă m = 100 g pleacă la t = 0 din origine cu viteza v_0 = 0,2 m/s sub acţiunea forţei

$$F = k(1 - t), \quad k = 0,1 \text{ N/s}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

După cît timp se opreşte şi ce distanţă parcurge pînă la oprire?

3) Un punct material de masă m se mişcă pe axa Ox, pornind din O cu viteza v_0. Se ştie că el întîmpină din partea mediului o rezistenţă $R = mkv^2$. Se cere $v(t)$ şi $x(t)$ la momentele $t>0$.

4) Un punct se mişcă în lungul axei Ox sub acţiunea forţei $F_x = ax - ex^3$, cu a,e constante fizice date.

Să se afle $x(t)$, dacă $x(0) = \sqrt{2a/e}$ şi $\dot{x}(0) = 0$.

5) Un corp de masă m se mişcă în linie dreaptă într-un mediu întîmpinînd din partea acestuia o rezistenţă exprimată prin $R = \frac{R_0}{2} + \frac{R_0 v}{2v_0}$, cu R_0 o anumită constantă fizică şi v viteza corpului.

Acest corp se opreşte după ce parcurge spaţiul s_0, el plecînd cu viteza v_0 dintr-un punct O luat ca origine a reperului; să se afle R_0 în funcţie de m, v_0 şi s_0.

6) Un vagon de cale ferată, primind un impuls, se deplasează pe o distanţă S în linie dreaptă.

Arătaţi că pentru aceeaşi viteză imprimată vagonului, durata mişcării vagonului nu depinde de masa lui.

122. 1) Dintr-un robinet curg picături de apă în cadenţa de 12o picături pe minut. La ce distanţă se va găsi picătura a doua P_2 de prima picătură P_1, după ce P_1 a parcurs 2o metri? Se va lua $g = 1o\ m/s^2$.

Examenul de admitere în Şcoala Politehnică, Bucureşti

2) Viteza unui corp lansat vertical în sus cu viteza iniţială v_0, luînd în considerare rezistenţa întîmpinată din partea aerului, e dată de formula

$$v(t) = a \cdot tg\left(-\frac{g}{a}t + \operatorname{arctg}\frac{v_0}{a}\right), \tag{1}$$

unde t este timpul scurs de la lansare, g acceleraţia gravitaţională şi a o constantă fizică dată. Determinaţi altitudinea atinsă de corp.

3) Un corp cade de la înălţimea h în T secunde. Intervalul de timp T îl împărţim în n subintervale egale cu t_0, astfel încît $nt_0 = T$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

In primul interval de timp t_0 corpul parcurge distanţa x_1, în următoarele t_0 secunde el parcurge distanţa x_2,..., în ultimele t_0 secunde corpul parcurge spaţiul x_n. Să se determine $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în funcţie de n şi de h.

Aplicaţie: n = 5, h = 245 m, g = 9,80 m/s^2.

4) Un punct material P, supus acţiunii greutăţii, e lansat pe verticală în jos cu viteza iniţială v_0, de la înălţimea h.

La impactul cu solul, el e aruncat în sus cu o viteză egală ca mărime cu aceea cu care a atins solul.

α) Pînă la ce înălţime H va urca punctul ?

β) In cît timp atinge această înălţime H?

5) Un corp de masă m = 2oo kg este lăsat să cadă liber de la înălţimea H = 49o m. Să se afle:

a) Energia potenţială a corpului în punctul iniţial.

b) Viteza de impact cu solul.

c) Timpul de cădere.

d) Energia mecanică pe care o are corpul la înălţimea h = 1oo m.

Examenul de admitere în Academia tehnică militară, Bucureşti

123. 1) Un proiectil P de masă m e lansat vertical, în sus, dintr-un punct O de pe sol cu viteza v_0.

In mişcarea sa el întîmpină o rezistenţă din partea aerului proporţională cu pătratul vitezei, coeficientul de proporţionalitate fiind mk.

Să se determine viteza cu care proiectilul atinge din nou Pămîntul.

2) Un corp de masă m = 1 g, cade în cîmpul gravitaţional al Pămîntului şi întîmpină o rezistenţă din partea aerului, astfel încît legea lui de mişcare este

$$x(t) = 490t - 245\,(1-e^{-2t}),$$

x fiind exprimat în m, t în s.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Axa Ox fiind dirijată în jos, să se afle forța de rezistență întîmpinată din partea aerului, în funcție de viteza v, luînd $g = 980\ cm/s^2$.

3) Să se studieze mișcarea unui punct material greu P de masă m, lăsat să cadă fără viteză inițială într-un mediu a cărui rezistență este mkv^2, v fiind viteza, iar k o constantă pozitivă.

4) O minge M avînd masa $0,4$ kg este aruncată vertical în sus cu viteza inițială de 20 m/s.

Rezistența aerului este $R = 0,48.10^{-2} v^2$.

Calculați timpul de urcare al mingii și înălțimea maximă la care a urcat.

Refaceți calculele în ipoteza că se neglijează rezistența aerului. Se va lua $g = 10\ m/s^2$.

5) Asupra unui corp de masă 1 kg, care inițial se găsește pe sol, acționează timp de 5 secunde o forță de 1,5 N, perpendiculară pe sol, îndreptată în sus. Calculați înălțimea maximă atinsă de corp. Se va lua $g = 10\ m/s^2$.

6) (<u>Mașina lui Atwood</u>). Să se determine accelerația corpurilor de mase m_1 și m_2, suspendate printr-un fir flexibil și inextensibil trecut peste un scripete de masă neglijabilă ca în figură, precum și tensiunea în fir.

Fig.4.5.

124. 1) Un capăt al unui fir flexibil și inextensibil e fixat în punctul A la o grindă fixă, iar de capătul său liber este suspendată o greutate Q. Firul este trecut peste un scripete mobil O, de care e suspendată greutatea P, $P < 2Q$, și este apoi trecut după un scripete fix O_1.

În momentul inițial sistemul se află în repaus și $h = 0$.

Se cere să se determine viteza v și accelerația a a greutății Q în funcție de spațiul h parcurs de această greutate (vedeți figura 4.6, alăturată; masele scripeților se consideră neglijabile).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

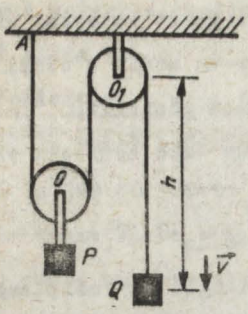


Fig.4.6.

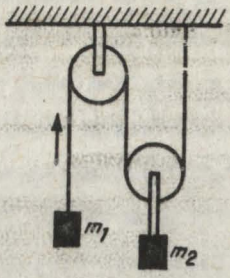


Fig.4.7.

2) Să se determine mişcările corpurilor de mase m_1 şi m_2 din dispozitivul desenat, precum şi tensiunea din fir, în cazurile:

1) $m_1 = m_2$; 2) $2m_1 = m_2$; 3) $m_1 \ll m_2$; 4) $m_1 \gg m_2$.

Masele scripeţilor sînt neglijabile (vedeţi figura 4.7.).

3) O picătură de apă are forma sferică şi cade liber într-o atmosferă de vaperi de apă suprasaturată. Considerînd că viteza de creştere a masei picăturii, i.e. $\frac{dm}{dt}$, e proporţională cu aria suprafeţei picăturii şi neglijînd rezistenţa mediului, determinaţi mişcarea particulei.

Se admite că în momentul formării picăturii (t=0) viteza ei de cădere a fost nulă.

4) Dintr-un lanţ de lungime ℓ, întins în lungul unei mese, o porţiune a sa de lungime x este lăsată să atîrne pe lîngă masă. Fie ρ densitatea liniară a lanţului şi μ coeficientul de frecare între lanţul în mişcare şi suprafaţa mesei pe care se sprijină.

Se cere acceleraţia şi condiţia de amorsare a mişcării.

Examen FMF, Bucureşti.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

125. 1) Un lanţ de lungime l se află în repaus pe un plan orizontal AB perfect luciu.

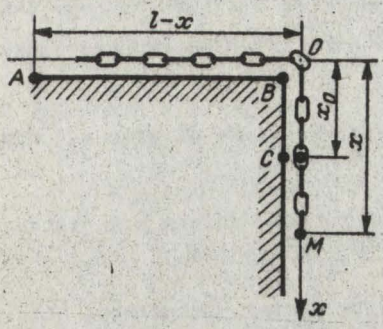


Fig.4.8.

La momentul t = 0, lanţul este menţinut în repaus şi partea care atîrnă vertical are lungimea x_0.

Lanţul este lăsat apoi liber şi la momentul t partea verticală a sa are lungimea x.

Lanţul are densitatea constantă şi egală cu p (masa unităţii de lungime).

α) Să se scrie teorema energiei cinetice pentru o deplasare elementară dx.

Să se deducă x în funcţie de t.

După cît timp lanţul cade de pe planul orizontal AB?

β) Să se afle tensiunea în lanţ în punctul C aflat la distanţa x_0 de planul orizontal AB.

Să se demonstreze că această tensiune trece printr-o valoare maximă, care valoare urmează a se determina.

2) Un punct material greu este aruncat pe verticală în jos, de la înălţimea h cu viteza v_0. Presupunem că la contactul cu solul acest punct este aruncat imediat în sus cu viteza V_0 cu care a atins Pămîntul. Se cer

α) Viteza V_0.

β) Înălţimea H la care poate urca mobilul.

γ) Timpul după care ajunge la înălţimea h, precum şi viteza v' din acest punct.

δ) Timpul de evoluţie a mobilului, pînă atinge înălţimea H.

3) Un corp de dimensiuni neglijabile de greutate G e aruncat vertical în sus cu viteza iniţială v_0. Acesta întîmpină din partea aerului o rezistenţă R proporţională cu masa sa şi cu pătratul vitezei sale. Se cere lucrul mecanic necesar pentru a transporta corpul la înăl-

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

ţimea $h = H$, unde H e înălţimea maximă de ascensiune.

4) O rachetă este prevăzută cu două meteare M_1 şi M_2, careîi pot comunica acesteia acceleraţiile constante a_1 şi a_2, cu $a_1 > a_2$, dirijate vertical în sus. Primul meter M_1 este proiectat ca să funcţioneze timpul t_1, iar al doilea t_2, cu $t_1 < t_2$.

Metearele pot funcţiona succesiv, întîi M_1 şi apoi M_2, sau simultan şi M_1 şi M_2.

In care din aceste două ipoteze racheta atinge o înălţime mai mare?

126. 1) Pe un plan orizontal este aşezat o ladă grea (L). Sub ce unghi α trebuie să acţioneze $\vec{F}$, cu F minim pentru a mişca uniform această ladă pe planul orizontal? Se dă coeficientul de frecare între ladă şi plan şi greutatea ei G.

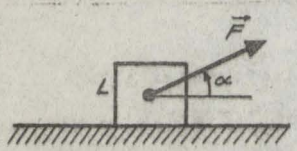


Fig.4.9.

2) Cît timp trebuie să acţioneze o forţă $\vec{Q}$ de modul constant Q, pe direcţie orizontală, asupra unui corp de masă m, pentru a-l aduce la viteza v? Coeficientul de frecare între corp şi sol este $\mu = 0{,}1$ iar corpul se mişcă pe planul orizontal, plecînd din repaus.

Aplicaţie: Q = 6000 N, m = 4000kg, v = 0,5 m/s, g = 10 m/s^2.

3) Fie un corp C de masă m care are coeficientul de frecare μ faţă de o suprafaţă orizontală pe care stă. Cu ce viteză trebuie proiectat corpul pentru a parcurge o distanţă dată d, pînă la oprire?

4) Pe o masă este aşezată o scîndură cu masa M = 1 kg, iar pe scîndură o cărămidă cu masa m = 2 kg. Cu ce forţă trebuie trasă scîndura pentru ca scîndura să alunece sub cărămidă. Coeficientul de frecare între cărămidă şi scîndură este $\mu_1 = 0{,}25$, iar între scîndură şi masă $\mu_2 = 0{,}5$.

5) Un corp C de greutate G este aşezat pe o masă orizontală, coeficientul de frecare între corp şi masă fiind μ. Cît timp trebuie să acţioneze o forţă $\vec{F}_1$ de modul constant asupra corpului C (vedeţi

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

figura 4.45.) pentru a-l aduce la viteza v, corpul plecînd din repaus?

6) Asupra unui corp care se deplasează pe o suprafaţă plană orizontală S, fără frecare, cu viteza v_0 = 5 m/s începe să acţioneze o forţă F = 1o N, dirijată după aceeaşi direcţie şi în acelaşi sens cu viteza $\vec{v}_0$. După 1o secunde de la aplicarea forţei F, energia cinetică a corpului devine 1ooo J. Calculaţi:

α) masa corpului; β) spaţiul parcurs în cele 1o secunde

γ) lucrul mecanic al forţei în cele 1o secunde;

δ) variaţia impulsului corpului în acelaşi interval de timp.

Examen admitere, învăţămînt economic, 1983.

7) Un punct material P, de masă m, se află într-o poziţie de echilibru instabil în punctul A(0,a). Din cauza unei mici perturbaţii

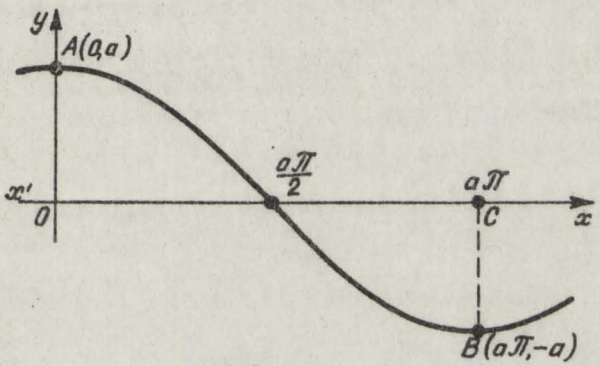


Fig.4.1o.

punctul P coboară pe cosinusoida netedă din figură, fără viteză iniţială, către punctul B, aflat la distanţa OC = aπ. Determinaţi viteza punctului P în B şi reacţiunea în B a cosinusoidei asupra punctului P. (Ecuaţia cosinusoidei este $y = a \cos \frac{x}{a}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$).

127. 1) Un punct material M se mişcă după legea x = achkt, y = bshkt. Să se afle expresia forţei sub acţiunea căreia se execută această mişcare. Ce mărimi mecanice (dinamice) se conservă în această mişcare?

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Un punct material M execută o mişcare plană şi se mişcă în jurul unui centru fix O din acel plan a.î. acceleraţia sa $\bar{a}$ e perpendiculară pe raza vectoare $\bar{r}$, care se roteşte cu o viteză unghiulară constantă ω. Care-s ecuaţiile mişcării punctului M şi care este acceleraţia sa?

Condiţiile iniţiale sînt: la $t = 0$,

$\bar{r} = \bar{r}_0$, $\theta_0 = 0$, $\bar{v} = \bar{v}_0$ $\bar{v}_0 \perp \bar{r}_0$.

(Wittenbauer)

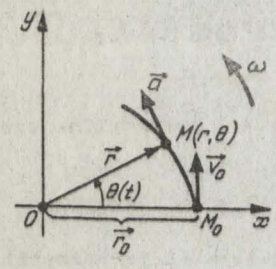


Fig.4.11.

128. 1) Sub ce unghi trebuie aruncat un corp pentru ca săgeata lui să fie egală cu bătaia sa?

2) Două corpuri C_1 şi C_2 sînt aruncate sub unghiuri diferite faţă de orizont şi cu viteze diferite, din acelaşi punct şi în acelaşi moment, astfel încît

(1) $\bar{r}_1(t) = \bar{v}_{1_0}\, t + \frac{1}{2}\bar{g}t^2$ şi $\bar{r}_2(t) = \bar{v}_{2_0}\, t + \frac{1}{2}\bar{g}t^2$, $t \in I$.

Să se arate că, în timpul mişcării lor, viteza relativă, i.e. $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$, este constantă ca mărime şi direcţie.

3) Un avion supersonic zboară deasupra Pămîntului la înălţimea h, cu viteza orizontală constantă v_1.

Dintr-o baterie antiaeriană B se trage un proiectil asupra avionului în momentul în care avionul trece pe deasupra acestei baterii. Să se afle

a) Ce condiţie trebuie să verifice viteza $\bar{v}_0$ a proiectilului pentru ca acesta să poată lovi avionul?

b) Sub ce unghi α trebuie tras, faţă de orizontală, pentru a lovi avionul?

Se neglijează rezistenţa aerului.

Aplicaţie: $h = 2000$ m şi $v_1 = 1440$ km/h.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

129. 1) Un avion A, zburînd la înălţimea h, trebuie să lovească ţinta terestră T. De la ce distanţă x_1, în stînga ţintei T, trebuie să lanseze proiectilul, dacă se ştie că avionul zboară (orizontal) cu viteza v_0 constantă? Se neglijează rezistenţa aerului (vedeţi figura 4.12.).

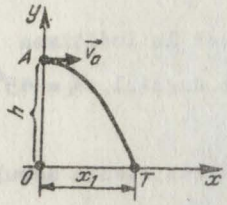


Fig.4.12.

Aplicaţie numerică: h = 1 km, v_0 = 36o km/h, g = 9,81 m/s^2.

2) Un proiectil este tras sub un unghi α = 6o°, folosind o încărcătură care îi asigură o viteză iniţială de 7o m/s la ieşirea din gura de foc.

Admiţînd că mişcarea se face în vid şi că g = 1o m/s^2, să se afle:

i) bătaia şi durata totală de traiect ale proiectilului.

ii) viteza în punctul de pe traiectorie, situat la distanţa orizontală x = 1oo m şi durata de traiect pînă în acest punct.

iii) valoarea bătăii maxime (adică atunci cînd proiectilul este tras sub ungheul α = 45°).

3) Un proiectil P a lovit un avion A, care zbura la înălţimea h deasupra Pămîntului. Se cunoaşte viteza v_0 a proiectilului la ieşirea din gura de foc, dar nu se cunoaşte poziţia tunului şi nici unghiul sub sub care s-a tras în avion.

Să se arate că tunul este situat în interiorul unui cerc avînd centrul pe verticala avionului lovit şi raza

$$R = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

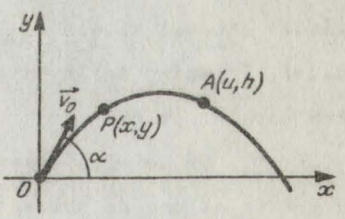


Fig.4.13.

13o. 1) Dintr-un punct O se trage un obuz M, care se poate asimila cu un punct material de masă m. Viteza iniţială $\vec{v}_0$ a acestuia face cu axa Ox, orizontală, unghiul α.

Să se arate că pentru a lovi o ţintă terestră dată există două unghiuri de tragere posibile, α_1 şi α_2, a căror sumă este $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

Cda. 236/987 Fasc. 15
https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Un proiectil realizează în aer o bătaie de 63ee m, cu un unghi de tragere $\alpha = 13^0$.

Să se evalueze bătaia pentru unghiul de lansare de $13^02e'$, dacă viteza inițială este aceeași.

3) Un tun dintr-o baterie de coastă, așezat la înălțimea h = 3e m deasupra nivelului mării, trage o salvă sub unghiul $\alpha = 45^0$ față de orizont cu viteza v_0 = 1ee e m/sec.

Care este bătaia realizată? Se neglijează rezistența aerului.

4) Un proiectil se mișcă după legea

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha_0 \cdot t \\ y = v_0 \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2} gt^2, \quad t \in I \end{cases}$$

Să se afle raza de curbură a traiectoriei la t = 0 și în momentul atingerii solului.

131. 1) Un avion de bombardament în picaj A se lansează asupra unei ținte terestre T sub un unghi $\alpha = 6e^0$ față de orizont și cu viteza v_0 = 54e km/h și aruncă o bombă de la înălțimea h = 6ee m.

La ce distanță S de țintă (vedeți figura 4.14.). trebuie lansată bomba pentru ca ea să lovească ținta T?

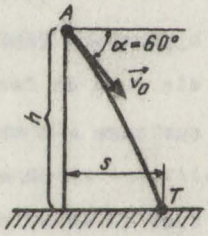


Fig.4.14.

2) Dintr-un punct O sînt lansate proiectile de aceeași viteză inițială sub diferite unghiuri, începînd de la un anumit moment, într-un plan paralel cu $\vec{g}$.

Să se afle domeniul plan ale cărui puncte nu pot fi atinse de proiectilele lansate.

3) Un corp de masă m este aruncat dintr-un punct A, situat la înălțimea de 49 m deasupra orizontalei OC, sub un unghi de 45^0, cu viteza inițială v_0 = 14 m/s. (vedeți figura 4.15.).

α) Să se determine ecuațiile parametrice ale traiectoriei.

β) După cît timp corpul atinge înălțimea maximă, care este această înălțime și care e viteza în acest punct?

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

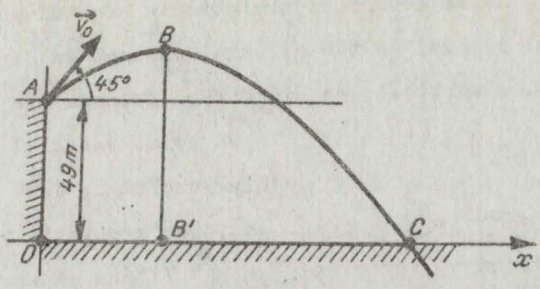


Fig.4.15.

γ) Care este distanţa maximă parcursă pe orizontală OC, pînă la impactul cu solul şi care este timpul de parcurgere a acestei distanţe?

δ) Care sînt componentele vitezei în punctul C de cădere şi ce unghi face viteza în acest punct cu axa orizontală Ox? Care este modulul vitezei în punctul C de cădere al corpului?

Examen 1985

4) Un corp a fost aruncat de la înălţimea h deasupra Pămîntului, din punctul O, sub unghiul α faţă de orizontală şi a căzut la distanţa s faţă de verticala locului de aruncare.

a) Cu ce viteză a fost aruncat corpul?

b) Cît timp a evoluat el în aer?

c) Ce înălţime maximă a atins?

Se neglijează rezistenţa aerului.

132. 1) Un avion cu reacţie zboară cu viteza de 900 km/h. Avînd în vedere că un om poate suporta o forţă de 5 ori cît propria-i greutate, determinaţi raza de curbură minimă a virajului pe care-l face pilotul unui asemenea avion, fără să-şi pună în pericol viaţa.

Comparaţi această situaţie cu cazul unui avion cu elice, pentru care v = 360 km/h. Luaţi g = 10 m/s^2.

2) Un punct material P de masă m cade într-un plan vertical, pornind din repaus, sub influenţa gravitaţiei şi a unei forţe perpendiculare pe viteza particulei, care e proporţională cu viteza.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Să se determine traiectoria acestui punct.

3) Intr-un tub eliptic, desenat în figura alăturată, aşezat într-un plan vertical, se mişcă fără frecare din vîrful B către vîrful A un punct material P de masă m, începînd din punctul B, fără viteză iniţială sub acţiunea greutăţii proprii $m\vec{g}$. Se cer:

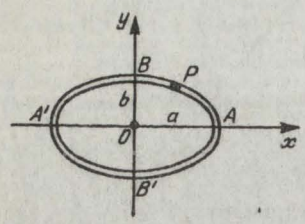


Fig.4.16.

α) Viteza şi acceleraţia punctului P în vîrfurile A şi B'.

β) Vitezele unghiulare ale lui P în vîrfurile A şi B' faţă de centrul elipsei O

γ) Vitezele areolare în vîrfurile elipsei A şi B'.

133. 1) Dintr-un punct O situat pe intersecţia unui plan P cu planul orizontal, înclinat pe acesta cu un unghi $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, se aruncă în vid un punct material greu M cu o viteză $\vec{V}_0$ ce face unghiul φ

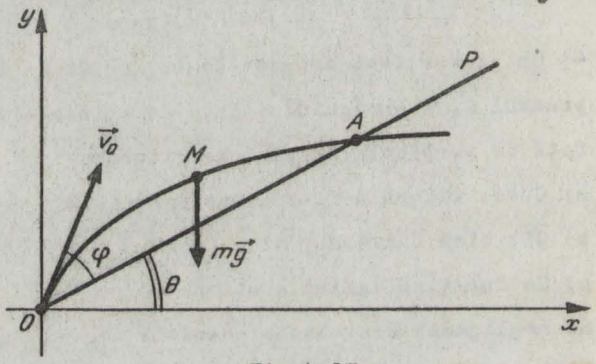


Fig.4.17.

cu planul P. Traiectoria lui M atinge din nou planul P în A, distanţa OA numită "bătaie" variind o dată cu φ, cînd intensitatea V_0 a vitezei iniţiale rămîne constantă. Să se demonstreze că:

a) Distanţa OA e maximă, atunci cînd vectorul $\vec{V}_0$ e aşezat pe bisectoarea OB a unghiului POy, unde Oy este verticala în O.

b) Două mobile aruncate din O cu viteze de aceeaşi intensitate $|\vec{V}_0|$, dar aşezate pe două izogonale OB' şi OB" faţă de OB i.e. $\sphericalangle B'OB = \sphericalangle BOB"$ au aceeaşi bătaie OA.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

e) Dacă vrem ca două mobile M_x și M_p aruncate din O cu viteze de aceeași intensitate v_0 și făcînd același unghi φ cu planul orizontal și cu planul P să aibă aceeași bătaie $OA_x = OA_p$ (vedeți figura 4.54. la pagina 327) atunci e necesar și suficient ca să avem $\varphi < 16°43'$.

d) Locul punctelor A_p cînd θ variază, însă φ și v_0 rămîn constante, e tocmai traiectoria unui punct material aruncat din O cu viteza $\vec{v}_0$, înclinată față de planul orizontal cu unghiul $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Examen FMF, anul II, București, 1949, GMF 4-5/1949

2) Cardioida $\rho = a(1+\cos\theta)$ este situată într-un plan vertical, axa sa polară fiind verticală descendentă. Un punct material greu P se mișcă fără frecare pe această curbă. In momentul inițial punctul pornește din punctul B cel mai de jos al cardioidei, fiind animat de o viteză egală cu aceea pe care ar fi căpătat-o dacă ar fi căzut liber din originea O pînă în acel punct.

Să se studieze mișcarea acestui punct.

3) O particulă M de masă m se mișcă fără frecare sub acțiunea cîmpului gravific $\vec{F}$ pe o cicloidă situată într-un plan vertical care are ecuațiile: (vedeți figura 4.18.):

$$\begin{cases} x = a(\theta + \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta), \quad \theta : I \longrightarrow [-\pi, \pi] \end{cases} \quad \text{de clasă } C^2$$

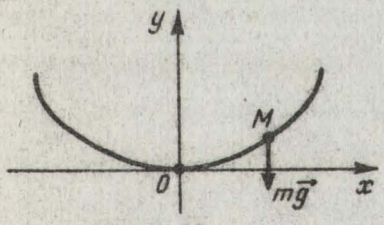


Fig.4.18.

Să se afle $s(t) = \widehat{OM}$ și modulul vitezei particulei știind că

$$s(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = v_0 \leq 2\sqrt{ga}.$$

4) Pe lemniscata lui Bernoulli $r^2 = 2a^2 \sin 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, dintr-un plan vertical cu axa Ox verticală dirijată în jos și cu axa de simetrie $y = x$, alunecă un punct P de masă m.

In originea reperului viteza lui P e nulă.

Să se afle reacțiunea R a lemniscatei în funcție de $\varphi = \sphericalangle(Ox, OP)$ și apoi în funcție de t.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Se va considera g = constant.

134. 1) Pe un stîlp de înălţime h = 5 m se află o bilă de masă M = 2oo g. Ea este străpunsă de un glonte cu viteza v_0 = 5oo m/s şi masa m = 1o g, exact prin mijloc (vedeţi figura).

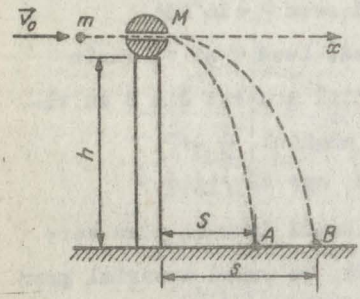


Fig.4.19.

La ce distanţă s va cădea glontele, dacă bila cade la distanţa S = 2o m de baza stîlpului?

Ce parte din energia cinetică a glontelui este transformată în căldură în timpul străpungerii bilei?

Rezistenţa aerului se neglijează, iar g = 1o m/s^2.

OIF, Varşovia, 1967

2) Un corp C de masă M, suspendat de un fir în O, este lovit de un glonte de masă m, care are viteza $\vec{V}$. Glontele rămîne în corpul C şi ansamblul "glonte plus corp" se ridică pînă la o anumită înălţime h. Calculaţi această înălţime h (fig.4.2o.).

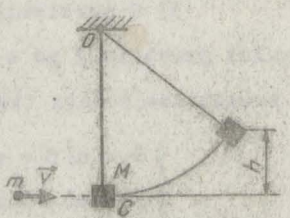


Fig.4.2o.

3) Pe un vagon-platformă este instalată un tun. Masa vagonului este M_p = 1o ooo kg, a tunului M_t = 5 ooo kg, iar a unui obuz care se află lîngă tun de M_o = 1oo kg. Viteza obuzului la ieşirea din gura de foc este v_o = 5oo m/sec. Să se determine viteza de recul a platformei în următoarele ipoteze:

a) vagonul-platformă e imobil;

b) Vagonul platformă se mişcă cu viteza de 5 km/h şi tragerea cu tunul se face în sensul de deplasare a vagonului platformă.

c) Vagonul platformă se mişcă cu 5 km/h şi tragerea cu tunul se face în sensul contrar al deplasării vagonului platformă.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

135. 1) Fie C(0,R) un cerc de centru O și rasa R, așezat într-un plan vertical ca în figură. Fie AB un diametru vertical și BC o coardă în cerc, care face cu orizontala unghiul α.

Să se demonstreze că oricare ar fi poziția lui C pe cerc, timpul după care un mobil M de masă m, lansat din C fără viteză inițială, în cîmpul gravific al Pămîntului și în absența frecării, ajunge în B este același

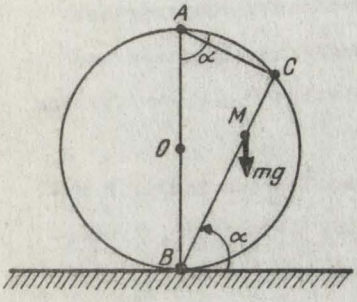


Fig.4.21.

$$t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$$

(Galilee)

2) O sanie este lansată în lungul unui plan înclinat, care face unghiul $\alpha = 45^\circ$ cu orizontala, după linia de cea mai mare pantă a planului înclinat. Ea revine la baza planului într-un timp de n ori mai mare decît timpul de urcare. Care e coeficientul de frecare la alunecare între sanie și planul înclinat?

3) Fie $y = \sqrt{2px}$, $x \geq 0$, ramura superioară a parabolei $y^2 = 2px$ situată într-un plan vertical și F (p/2;0) focarul său. Să se determine unghiul α pe care-l face dreapta FM cu axa Ox, dreaptă pe care un punct greu P de masă m poate coborî de pe parabolă pînă în focarul ei în cel mai scurt timp posibil.

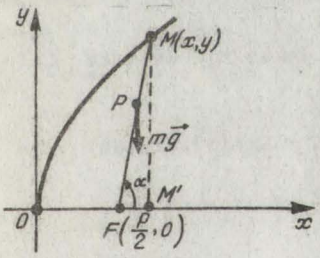


Fig.4.22.

4) De la baza unui plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30^\circ$ pe care $\mu = 0,2$ se aruncă după linia de cea mai mare pantă în sus un corp cu viteza $v_0 = 4$ m/s.

a) Calculați distanța maximă parcursă de corp pe plan.

b) Aflați locul geometric al punctelor celor mai depărtate de baza planului, atinse de corpul acesta, în cazul în care unghiul α al planului variază.

5) Din punctul cel mai înalt al unui plan înclinat cu unghiul α este lăsat liber să cadă un corp. Acesta străbate lungimea planului

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

şi apoi se deplasează în continuare pe un plan orizontal, oprindu-se după ce în acest plan a străbătut o distanţă egală cu lungimea planului înclinat.

Să se determine coeficientul de frecare μ, acelaşi pe planul înclinat şi pe cel orizontal.

6) Un tun A dintr-o baterie de artilerie este supravegheat de un radar advers care comandă un tun B, care urmează să lanseze un proiectil balistic Q împotriva proiectilului balistic P lansat de A, pentru a-l lovi pe acesta în zbor.

Admitem că atunci cînd tunul A a lansat un proiectil P, radarul poate detecta cu ajutorul unui singur pachet de unde electromagnetice viteza $\vec{v}_\alpha$ a lui P şi unghiul α sub care s-a tras.

Notăm cu t_1 timpul necesar radarului să facă măsurătorile respective şi să transmită comanda la tunul B.

Fie $\vec{v}_\beta$ viteza proiectilului lansat de B contra celui lansat de A.

Determinaţi unghiul de tragere β din B pentru ca proiectilul lansat din B să intercepteze pe cel lansat din A.

Viteza de propagare a undelor electromagnetice se consideră egală cu viteza luminii în vid (3.10^8 m/s).

Distanţa care separă cele două baterii de tunuri este de ℓ metri.

Notăm $t_e = t_1 + t_2$, unde t_2 este timpul necesar undelor electromagnetice să se propage.

4.4.3. Rezolvarea problemelor

118. 1) Din legea a doua a lui Newton scrisă scalar $ma = F$, deducem

$$m_1 = \frac{F}{a_1} \quad \text{şi} \quad m_2 = \frac{F}{a_2}$$

apoi în conformitate cu aceeaşi lege avem

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$(m_1+m_2)a = F \quad \text{sau} \quad F(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})a = F;$$

deci

$$a = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_1 a_2}{a_1+a_2} \qquad (\text{metri/secundă}^2)$$

2) A doua lege a lui Newton ne dă

$$a = \frac{F}{m}\ ; \text{ dar } \quad x = \frac{at^2}{2}; \text{ deci } x = \frac{F}{2m}\, t^2 \longrightarrow v: = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}\, t;$$

$$v(\tau) = \frac{F\tau}{m}\ , \quad E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m.F^2\tau^2}{2m^2}; \quad m = \frac{F^2\tau^2}{2.E_c}\ .$$

In cazul aplicaţiei $m = \frac{4.16}{2.6,4} = 5$ kg.

119. 1) Fie τ timpul după care motociclistul ajunge la ultimul soldat al coloanei, lîngă care se află şi adjunctul comandantului. Motociclistul parcurge distanţa $d_1 = V\tau$, iar ultimul soldat către motociclist distanţa $d_2 = v\tau$. Evident $d_1 + d_2 = \ell$, adică $\tau(V+v) = \ell$ şi deci

$$\tau = \frac{\ell}{V+v} = \frac{2\ 000}{2,5+7,5} = 2\text{o secunde}.$$

Fie τ' timpul de înapoiere al motociclistului. Soldatul cu motocicleta parcurge distanţa $d_1' = V\tau'$, iar ultimul soldat distanţa $d_2' = v\tau'$.

Dar $d_1 - d_2 = \ell$, i.e. $\tau'(V-v) = \ell$, de unde $\tau' = \frac{\ell}{V-v} = \frac{2000}{5} =$ = 4oo s.

Astfel motociclistul şi-a îndeplinit misiunea în $t = \tau + \tau' =$ = 6oo s = 1o minute.

2) Fie T timpul în care biciclistul trebuie să ajungă din A în B. Turistul pe distanţa AC = 1o km a mers cu viteza $v = \frac{1\text{o km}}{4\text{o min}} = \frac{1}{4}$ km/min.

Dacă din C pleacă mai departe cu aceeaşi viteză el va merge $t'' = \frac{AB-1o}{\frac{1}{4}} = (4\ AB - 4o)$ minute.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Dacă din C îşi modifică viteza şi merge cu $v' = \frac{1}{4} - \frac{3}{60} =$ $= \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$ km/min, el va avea nevoie de $t''' = \frac{AB-1o}{\frac{1}{5}} = (5\ AB-5o)$ minute.

Fie $t' = 4o$ minute, timpul în care a parcurs primii 1o km.

Conform enunţului trebuie să avem: $T = t' + t'' + 24$ şi $T = t' + t''' + 1o$.

Acum distanţa AB rezultă imediat din relaţia $t' + t'' + 24 =$ $= t' + t''' + 1o$; $4AB - 4o + 24 = 5\ AB - 5o + 1o$. Deci AB = 24 km.

3) După începerea mişcării avem

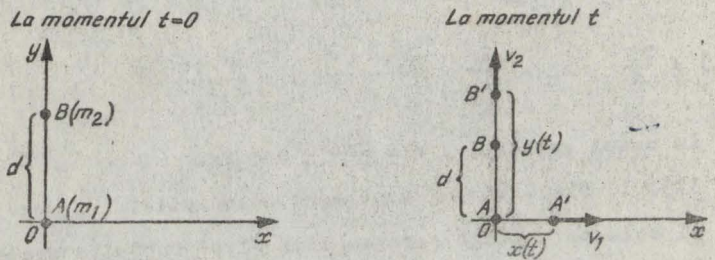


Fig.4.23.

$AA' = x(t) = v_1 t$, $OB' = y(t) = d + v_2 t$.

Centrul maselor C va avea coordonatele

$$x^* = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2}, \qquad y^* = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 y(t)}{m_1 + m_2}$$

adică

$$(1) \qquad x^* = \frac{m_1 v_1 t}{m_1+m_2}, \quad y^* = \frac{m_2(d+v_2 t)}{m_1+m_2}, \quad t \geq 0$$

Astfel C descrie o semidreaptă, situată în cadrul I, cu originea în punctul

$$C_o(x^* = 0\ ;\ y^* = \frac{m_2 d}{m_1+m_2})$$

Dacă între relaţiile (1) eliminăm timpul t, găsim ecuaţia carteziană a traiectoriei lui C:

$$y^* = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} \cdot x^* + \frac{m_2 d}{m_1+m_2},$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Acum viteza lui C are proiecţiile $v_x^M = \dot{x}^M(t)$

şi $v_y^M = \dot{y}^M(t)$, iar $v^M = \sqrt{v_x^{M^2} + v_y^{M^2}} = \frac{\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}}{m_1 + m_2}$.

4) Fie O poziţia omului şi A poziţia autobuzului în momentul în care omul porneşte în direcţia OA', pentru a întîlni autobuzul în A'. Conform enunţului avem

$$AA' = Vt_1$$

$$OA' = vt_2;\ t_1 \geq t_2;$$

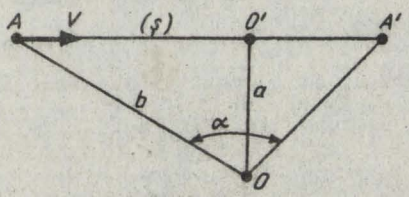


Fig.4.24.

Aria $S_{OA'A} = \frac{AA' \cdot OO'}{2} = \frac{OA \cdot OA'}{2} \sin \mathcal{L}$;

deci: $Vt_1 \cdot a = b \cdot vt_2 \cdot \sin \mathcal{L}$; de aici $\frac{t_1}{t_2} = \frac{bv \sin \mathcal{L}}{aV} \geq 1$;

deci $\sin \mathcal{L} \geq \sin \mathcal{L}_o = \frac{aV}{bv}$, $\mathcal{L}_o \leq \mathcal{L} \leq \pi - \mathcal{L}_o$.

In cazul aplicaţiei $\sin \mathcal{L}_o = \frac{250}{390} \longrightarrow \mathcal{L}_o = 39^0$.

Deci $\mathcal{L} \in [39^0;\ 141^0]$.

5) Avem $S_1 = v_1t$; $S_2 = v_2t$ şi $S = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.t$. Deci în fiecare oră spaţiul S creşte cu $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ kilometri. Dacă $S_1 = v_1t$, atunci $t = \frac{S_1}{v_1}$ şi $S = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot \frac{S_1}{v_1}$

In cazul aplicaţiei avem $S = 5oot$; apoi $S = 5oo \frac{1200}{500} =$ $= 2ooo$ km.

6) Exprimăm vitezele în metri pe secundă:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$v = 5,4$ km/h $= \frac{5400}{3600} = 1,5$ m/s.

$V = 14,4$ km/h $= 5$ m/s.

Fie B punctul de plecare al bicicliștului, P punctul de plecare al pietonului și I punctul de întîlnire al lor (vedeți figura 4.25.).

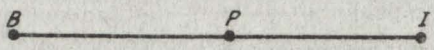


Fig.4.25.

Vom avea BI = BP + PI sau $Vt = 175 + vt$ sau $4t = 175+1,5t$; rezultă $t = 70$ secunde. Distanța la care se întîlnesc este BI = V.t = 280 m respectiv PI = vt = 1,5.70 = 105 m.

12o. 1) Exprimăm vitezele celor două automobile în metri pe secundă: $v_1 = \frac{80000}{3600} = 22,22$ m/s, $v_2 = 25$ m/s. Notăm $a_1 = 2,5$ m/s^2 și $a_2 = 2$ m/s^2. Fie A_1 și A_2 pozițiile automobilelor cînd A_1 începe să frîneze. Fie de asemenea A_1' și A_2' pozițiile în care se opresc automobilele. Atunci avem:

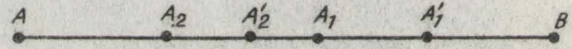


Fig.4.26.

$$A_2A_1' = A_2A_1 + A_1A_1' = A_2A_1 + \frac{v_1^2}{2a_1} = A_2A_1 + 98,76 \text{ m};$$

$$A_2A_2' = v_2 \cdot 1 + \frac{v_2^2}{2a_2} = 181,25 \text{ m};$$

Conform enunțului 1o = $A_2A_1' - A_2A_2'$; rezultă $A_2A_1 = 92,49$ m.

2) In primele 3o minute cele două mașini parcurg 25 km și 2o km. Astfel, la finele celui de al 3o-lea minut, mașinile M_3, M_2 și M_1 au următoarea așezare

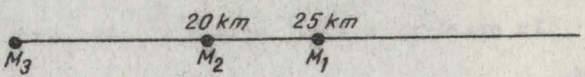


Fig.4.27.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

In momentul t' în care M_3 ajunge pe M_2 în $M_2' = M_3'$ avem situaţia

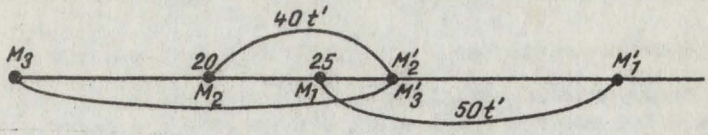


Fig.4.28.

$M_3M_3' = x_3' = v_3t' = 2o + v_2t'$; $M_1M_1' = v_1t'$ sau

(1) $v_3t' = 2o + 4o\ t'$; $M_1M_1' = 5o\ t'$

Distanţa dintre M_3' şi M_1' la momentul t' este:

$M_3'M_1' = M_3M_1' - M_3M_3' = 25 + 5ot' - (2o + 4o\ t')$.

Deci $M_3'M_1' = 5 + lot'$.

De aici încolo M_3 trebuie să meargă 1,5 ore pînă ajunge pe M_1. De aceea vom avea:

$v_3 \cdot 1,5 = 5 + lo\ t' + 5o\ (1,5)$ sau

$1,5\ v_3 = 8o + lot'$ (2)

Astfel cele două relaţii care ne determină pe v_3 şi pe t' sînt:

(1) $v_3t' = 2o + 4ot'$

(2) $1,5 \cdot v_3 = 8o + lot'$

De aici găsim t' = 1 h şi v_3 = 6o km/h.

121. 1) Legea a II-a a lui Newton ne dă $ma = F$ sau $\frac{dv}{dt} = F$; dar $v = a + 2bt + 3ct^2$ şi $\frac{dv}{dt} = 2b + 6ct$. Acum problema s-a redus la a elimina pe t între relaţiile

$$\begin{cases} 3ct^2 + 2bt + a - v = 0 \\ 6ct + 2b - F = 0 \end{cases}$$

Scriind că rezultantul acestor două polinoame în t*) e nul, avem

*) Vedeţi "E.Rogai, Tabele şi formule matematice", Editura Tehnică, Bucureşti, 1983 pag.79.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\begin{vmatrix} 3a & 2b & a-v \\ 6a & 2b-F & 0 \\ 0 & 6a & 2b-F \end{vmatrix} = 0.$$

De aici deducem imediat că $F = \text{signum}\,(2b + 6at) \cdot \sqrt{4b^2 + 12av - 12aa}$.

2) După legea a II-a a lui Newton scriem:

$0{,}1 \cdot \ddot{x} = 0{,}1 - 0{,}1\,t$. De aici deducem

$0{,}1\,\dot{x} = 0{,}1 \cdot t - 0{,}1\,\frac{t^2}{2} + C_1$, respectiv (1)

$0{,}1\,x = 0{,}1\,\frac{t^2}{2} - \frac{0{,}1t^3}{6} + C_1 t + C_2$ (2)

Punînd în (1) condiţia $x(0) = 0{,}2$ găsim $C_1 = 0{,}02$

Punînd în (2) condiţia $x(0) = 0$, deducem $C_2 = 0$.

In momentul $t = \tau$ al opririi avem $\dot{x}(\tau) = 0$ şi (1) ne dă ecuaţia în τ: $\tau^2 - 2\tau - 0{,}4 = 0$ cu rădăcina acceptabilă $\tau \approx 2{,}2$ secunde. Acum spaţiul parcurs se calculează cu $x(t)$ dat de (2):

$$x(\tau) \approx 1{,}09 \text{ m}.$$

3) Legea a II-a a lui Newton ne permite să scriem:

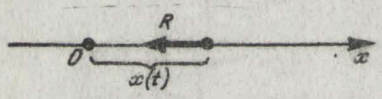


Fig.4.29.

$m\frac{dv}{dt} = -mkv^2$; de aici găsim $-\frac{dv}{v^2} = k\,dt$

şi apoi prin integrare $\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = kt$ sau

$v(t) = \frac{v_0}{1+v_0 kt}$, $t \geq 0$.

Scriind că $v = \frac{dx}{dt}$, rămîne să integrăm ecuaţia diferenţială $\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1+v_0 kt}$, cu condiţia iniţială sau Cauchy $x(0) = 0$.

Rezultă $x(t) - x(0) = \frac{1}{k}\ln(1+v_0 kt)$ sau, cu $x(0) = 0$,

$x(t) = \frac{1}{k}\ln(1+v_0 kt)$, $t \geq 0$.

Se observă că $x(t) \longrightarrow +\infty$, cînd $t \longrightarrow +\infty$, dar cu o viteză din ce în ce mai mică, fiindcă $v(t) \longrightarrow 0$ cînd $t \longrightarrow +\infty$.

4) Conform enunţului trebuie să avem

$$m\ddot{x} = ax - cx^3;$$

această ecuaţie, după înmulţirea cu $2\dot{x}$, se mai scrie

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$2m\cdot\ddot{x}\dot{x} = 2a\,x\dot{x} - 2cx^3\dot{x};$$

integrăm apoi o dată și găsim:

$$m\dot{x}^2 = ax^2 - \frac{1}{2}cx^4 + C_1;$$

punem condiția inițială

$x(0) = 0$ și obținem $C_1 = 0$ căci $x(0) = \sqrt{\frac{2a}{c}}$; rezultă deci

$$\dot{x}(t) = \pm\sqrt{\frac{a}{m}}\,x(1 - \frac{c}{2a}x^2)$$

Considerăm cazul $\dot{x}(t) = +\sqrt{\frac{a}{m}}\cdot x(1 - \frac{c}{2a}x^2)$ (1)

Evident $x(t) = \sqrt{\frac{2a}{c}}$ e o soluție particulară a ec (1), dar ea nu corespunde problemei fizice puse. O lăsăm la o parte.

In ec (1) separăm variabilele și obținem

$$(2)\qquad \frac{dx}{x\sqrt{1 - \frac{c}{2a}x^2}} = \sqrt{\frac{a}{m}}\cdot dt; \quad \text{cu } y: = \frac{1}{x}$$

ec (2) se integrează imediat și ne dă

$$y + \sqrt{y^2 - \frac{c}{2a}} = C_2\, e^{-\sqrt{\frac{a}{m}}\cdot t}.$$

De aici deducem pe y, apoi pe x și punem condiția inițială $x(0) = \sqrt{\frac{2a}{c}}$. Găsim în final:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2a}{c}}\cdot\frac{1}{ch(\sqrt{\frac{a}{m}}\cdot t)}, \quad t \geq 0.$$

5) Legea a II-a a lui Newton ne dă:

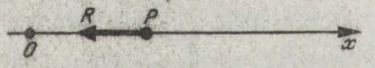


Fig.4.3e.

$m\frac{dv}{dt} = -\frac{R_e}{2}(1 + \frac{v}{v_e})$. Fie $v = f(s)$.

Atunci $\frac{dv}{dt} = f'(s).f(s)$ unde $f'(s) = \frac{df(s)}{ds}$ ecuația precedentă devine

$$mff' = -\frac{R_e}{2v_e}(v_e + f) \quad \text{sau}$$

$$2mv_e f(s)df + R_e(v_e + f(s))ds = 0 \quad \text{sau}$$

$$2mv_e df - 2mv_e^2\frac{df}{f+v_e} + R_e ds = 0.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Dacă integrăm de la t = 0 până în momentul opririi găsim

$$2mv_0 \cdot f \Big|_{f=0}^{f=v_0} - 2mv_0^2 \; n(f+v_0) \Big|_{f=0}^{f=v_0} + R_0 s \Big|_{s=0}^{s=s_0} = 0$$

respectiv

$$R_0 = \frac{2mv_0^2}{s_0}(1 - \ln 2).$$

6) Fie v_0 viteza ce se imprimă vagonului.

Forţa de frecare este $F = \mu mg$. Ea se opune mişcării vagonului.

Avem $\frac{mv_0^2}{2} = F.S,$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg\mu S; \qquad S = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Legea de mişcare este

$$x = v_0 t - \frac{at^2}{2}, \quad v = v_0 - at.$$

La oprire $v = 0$; $v_0 = a\tau$; $\tau = \frac{v_0}{a}$, $a = \mu g$,

$$\tau = \frac{v_0}{\frac{m\mu g}{m}} = \frac{v_0}{\mu g}$$

Deci durata mişcării nu depinde de masa vagonului.

122. 1) Picăturile de apă cad câte două pe secundă, adică ele se desprind de robinet din 0,5 secunde în 0,5 secunde.

Dacă notăm cu P_1 prima picătură, atunci spaţiul parcurs de ea după desprindere este $x_1 = \frac{1}{2} gt^2$ şi parcurge 20 m în timpul $t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{g}} = 2$ secunde.

Dacă notăm cu P_2 a doua picătură desprinsă de robinet, atunci ea cade 2 - 0,5 = 1,5 secunde.

Astfel, spaţiul parcurs de P_2 este $x_2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1,5^2 = 11,25$m.

Acum distanţa dintre particulele P_1 şi P_2, după ce P_1 a parcurs 20 metri, este $P_1P_2 = x_1 - x_2 = 8,75$ m.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Formula (1) se mai scrie (2) $dx = a.tg(-\frac{g}{a}t + arctg\frac{v_0}{a})dt$.

Fie τ timpul scurs până la atingerea înălțimii maxime. In acel moment $v(\tau) = 0$, adică $\tau = \frac{a}{g}$ are tg $\frac{v_0}{a}$.

Integrăm (2) între $x(0)$ și $x(\tau)$, respectiv 0 și τ și avem

$$\int_{x(0)}^{x(\tau)} dx = \int_0^{\tau} atg(-\frac{g}{a} \cdot t + \text{are tg}\frac{v_0}{a})dt$$

sau

$$x(\tau) - x(0) = \frac{a^2}{g} \ln \left| \cos(-\frac{g}{a}t + arctg\frac{v_0}{a}) \right|_{t=0}^{t=\tau}$$

sau

$$x(\tau) - 0 = -\frac{a^2}{g} \ln \left| \cos(arctg\frac{v_0}{a}) \right| =$$

$$= -\frac{a^2}{2g} \ln \cos^2(arctg\frac{v_0}{a});$$

$$x(\tau) = \frac{a^2}{2g} \ln(1 + \frac{v_0^2}{a^2}).$$

3) Conform cu legea de cădere în cîmpul de gravitație al Pămîntului în vid avem

(1) $x_1 = \frac{1}{2}gt_0^2$

(2) $x_1+x_2 = \frac{1}{2}g(2t_0)^2$

(n) $h = x_1+x_2+\ldots+x_n = \frac{1}{2}g(nt_0)^2$

Din relația a n-a, găsim : $\frac{gt_0^2}{2} = \frac{h}{n^2}$, iar din celelalte $x_1 = \frac{h}{n^2}$, $x_2 = \frac{3h}{n^2}$, ..., $x_n = \frac{2n-1}{n^2}h$.

In cazul aplicației, cu $g = 9,8$ m/s^2, obținem $x_1 = 9,8$ m, $x_2 = 29,4$ m, $x_3 = 49$ m, $x_4 = 68,6$ și $x_5 = 88,2$ m.

4) $\mathcal{L}$) <u>In perioada de cădere</u> mișcarea e uniform accelerată și $v(t) = v_0 + gt$, respectiv $y(t) = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Să admitem că la momentul $t = \tau$ punctul a ajuns în A_0 la sol. Atunci vom avea

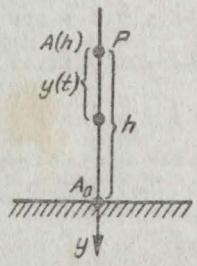


Fig.4.31.

$$A_0 \quad \begin{cases} h = v_0\tau + \frac{1}{2}g\tau^2 & (1) \\ v_\tau = v_0 + g\tau & (2) \end{cases}$$

Din (1) deducem timpul de cădere $\tau = \frac{\sqrt{v_0^2+2gh}-v_0}{g}$

iar din (2) viteza $v_\tau = v_0 + g \cdot \frac{\sqrt{v_0^2+2gh}-v_0}{g} =$

$$= \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

In perioada de urcare, punctul execută o mişcare uniform încetinită pentru care avem:

$$v_1(t) = v_\tau - gt, \quad y_1(t) = v_\tau t - \frac{1}{2}gt^2$$

La înălţimea H avem $v_1 = 0$; adică timpul de urcare este

$t_u = \frac{v_\tau}{g} = \frac{\sqrt{v_0^2+2gh}}{g}$, respectiv

$$H = v_\tau \cdot t_u - \frac{1}{2}g\,t_u^2 = \frac{v_0^2 + 2gh}{g} - \frac{1}{2}g \cdot \frac{v_0^2 + 2gh}{g} = \frac{v_0^2 + 2gh}{2g}$$

β) Timpul scurs de la începutul mişcării, până la atingerea înălţimii H este

$$t = \tau + t_u = 2\,\frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} - \frac{v_0}{g}$$

5) a) Evident $E_p = mgH = 96e\ 4ee$ J

b) $v = \sqrt{2gH} = 98$ m/s.

c) $t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 1e$ s.

d) $E = E_p + E_c = mgh + \frac{mv^2}{2} = mgh + \frac{1}{2}m.g(H-h) = mgH = E_p$

123. 1) La urcare avem legea

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - mkv^2 \quad \text{sau} \quad \frac{dv}{dt} = -(g+kv^2).$$

Fie $v = f(y)$. Atunci $\frac{dv}{dt} = f'(y)v = ff'$ şi ed precedentă devine:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$ff' = -(g + kf^2)$$

Am găsit o ed cu variabilele separabile:

$$\frac{2kff'}{g+kf^2} = -2k;$$ integrăm și găsim

$$\ln(g + kf^2) = -2ky + C.$$

Cu $y(0) = 0$, $v(0) = v_0$, găsim $C = \ln(g + kv_0^2)$.

Deci

$$y = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{g+kv_0^2}{g+kv^2}\right).$$

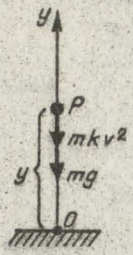


Fig.4.32

Înălțimea maximă atinsă de proiectil la urcare se obține pentru $v = 0$ și este

$$h = \frac{1}{2k} \ln\left(1 + \frac{kv_0^2}{g}\right)$$

La coborîre avem legea

$\frac{md^2x}{dt^2} = mg - mkv^2$. Ca la urcare găsim:

$$y = \frac{1}{2k} \ln \frac{g}{g-kv^2}$$

Scriind că în momentul impactului cu solul $y = h$, găsim viteza de impact

$$v^2 = \frac{v_0^2 g}{g+kv_0^2}.$$

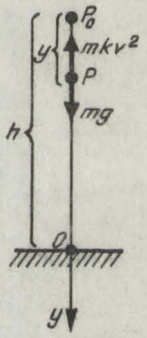


Fig.4.33

2) Legea a II-a a lui Newton se scrie $m\ddot{x} = mg - R$; de aici deducem $R = mg - m\ddot{x}$. Dar $\dot{x} = 49e + 49e\, e^{-2t}$; $\ddot{x} = -98e\, e^{-2t}$; așa că R se găsește imediat

$$R = 98e(1 + e^{-2t}) = 2v(t).$$

3) Mișcarea este rectilinie. Vom lua ca origine poziția inițială și ca sens pozitiv verticala ascendentă.

Avem $R = mkv^2$, $k > 0$, și R este îndreptată în sens contrar vitezei.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

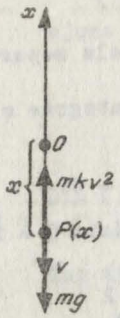


Fig.4.34.

<u>Mişcarea descendentă</u> este guvernată de legea

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg + mkv^2 \\ \dot{v} = -g + kv^2; \end{cases}$$

avem succesiv

$$\frac{dv}{kv^2-g} = dt; \quad \frac{dv}{v^2-\frac{g}{k}} = kdt; \quad \frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{k}}} \ln\left|\frac{v-\sqrt{\frac{g}{k}}}{v+\sqrt{\frac{g}{k}}}\right| = kt + C_1;$$

$$t + C = \frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln\left|\frac{v-\sqrt{\frac{g}{k}}}{v+\sqrt{\frac{g}{k}}}\right|; \text{ dar}$$

$v(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2\sqrt{kt}} \ln 1$ sau $C = 0$; astfel găsim

$$\ln\left|\frac{v-\sqrt{\frac{g}{k}}}{v+\sqrt{\frac{g}{k}}}\right| = 2\sqrt{gk} \cdot t \text{ etc.}$$

4) Scriem a doua lege a lui Newton:

$m\ddot{x} = -mg - R$ la care adaugăm condiţiile iniţiale (vedeţi figura 4.35.):

$x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Cu datele concrete ecuaţia de mişcare devine

$\ddot{x} + 0{,}12\,\dot{x}^2 = -10$ sau $\ddot{x} = -0{,}012(v^2 + 833)$ sau

$\dot{v} = -0{,}012(v^2 + 833)$ sau $\frac{dv}{v^2+833} = -0{,}012\,dt;$

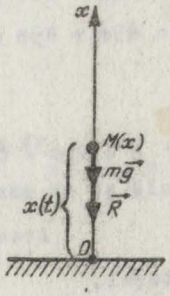


Fig.4.35.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

(2) $0,0346479 \cdot \operatorname{arctg}(0,0346479 \cdot v(t)) = K - 0,012\ t$.

Numărul K îl aflăm cu ajutorul condiției: la $t = 0$ avem $v(0) = 20$ m/s.

Rezultă $K = 0,0211352$.

Înlocuind pe K și deducînd pe v(t) în funcție de t, din (2) obținem

(3) $$v(t) = 28,8 \operatorname{tg}(0,6 - 0,346 \cdot t),$$

Din cererea $v(\theta) = 0$ rezultă timpul θ de urcare a imaginii și anume $\theta \cong 1,7$ secunde.

Acum înlocuim în (3) pe v cu $\frac{dx}{dt}$ și mai integrăm o dată și găsim spațiul x(t) parcurs de mingea M:

(4) $$x(t) = C + 83,24 \ln \cos(0,6 - 0,346 \cdot t).$$

Constanta C o deducem din condiția: $x(0) = 0$.

Rezultă $C = -83,24 \ln \cos 0,6 \cong 16$ metri.

Deci expresia lui x(t) se scrie

(5) $$x(t) = 16 + 83,24 \ln \cos(0,6 - 0,346 \cdot t).$$

Din (5) pentru $t = \theta$ găsim înălțimea maximă până la care se urcă mingea:

$$x_{max} = 16 \text{ metri.}$$

5) Avem $F_{acc} = F - G = 5$ N și deci $a = \frac{F-G}{m} = 5$ m/s^2.

În t_1 secunde corpul urcă la înălțimea $h = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{F-G}{2m} \cdot t_1^2$.

După t_1 secunde corpul are viteza $v_1 = a t_1 = \frac{F-G}{m} t_1$.

De aici încolo corpul evoluează după legea

$$\begin{cases} x = h_1 + v_1 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v = v_1 - g t \end{cases}$$

El se oprește cînd $t = \frac{v_1}{g}$; atunci înălțimea maximă atinsă este:

$$x = h_1 + \frac{v_1^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_1^2}{g^2} = h_1 + \frac{v_1^2}{2g}.$$

Cda. 236/987 fasc. 16

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Cu datele numerice din enunț găsim

$$x_{maxim} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1} \cdot 25 + \left(\frac{5}{1} \cdot 5\right)^2 \frac{1}{2 \cdot 10} = 93{,}75 \text{ m.}$$

6) Izolăm corpurile, introducînd tensiunea din fir; aplicăm legea a II-a a lui Newton primului corp (vedeți fig.4.36. 1))

$$m_1 a = T - m_1 g \qquad (1)$$

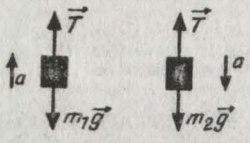


Fig.4.36.

Procedăm analog și cu corpul de masă m_2; avem (figura 4.36.2)):

$$m_2 a = m_2 g - T \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \quad \text{și} \quad T = \frac{2 m_1 m_2}{m_2 + m_1} g$$

124. 1) Aplicăm teorema energiei: $E_2 - E_1 = L_{12}$, unde

$E_1 = 0$, $E_2 = \frac{1}{2} m_Q v_Q^2 + \frac{1}{2} m_P v_P^2$; dar $v_P = \frac{1}{2} v_Q$; deci (cu $v_Q = v$)

$$E_2 = \frac{1}{2} m_Q v^2 + \frac{1}{8} m_P v^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2 + \frac{1}{8} \frac{P}{g} v^2 = \frac{v^2}{2g} \left(Q + \frac{P}{4}\right)$$

Avem apoi $L_{12} = Qh - P \frac{h}{2}$, dacă observăm că drumul urmat de P e jumătate din cel parcurs de Q.

Egalitatea $E_2 - E_1 = L_{12}$ ne dă

$$v = 2\sqrt{gh \frac{2Q - P}{4Q + P}}$$

Avem în continuare $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot v = 2g \frac{2Q - P}{4Q + P}$.

Dacă admitem că la $t = 0$ avem $h = 0$ și $v = 0$, atunci $h = \frac{at^2}{2}$ și $v = at$, ca a determinat mai sus.

2) Izolăm succesiv corpurile introducînd forțele $\vec{T}$ și $2\vec{T}$.

a) Pentru corpul de masă m_1 legea a II-a a lui Newton ne permite să scriem $m_1 a_1 = T - m_1 g$ (1); (vedeți fig.4.37.1)).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Cînd corpul de masă m_1 parcurge distanța x_1, corpul de masă m_2 parcurge $x_2 = \frac{x_1}{2}$; de aceea

$$2a_2 = a_1 . \qquad (2)$$

b) Pentru corpul de masă m_2 scriem (vedeți figura 4.37.2)):

$$m_2 a_2 = m_2 g - 2T \qquad (3)$$

Din relațiile (1), (2) și (3) găsim

$$a_1 = \frac{2(m_2-2m_1)g}{4m_1 + m_2} \quad ; \quad T = \frac{3m_1 m_2 \cdot g}{4m_1+m_2}$$

$$a_2 = \frac{(m_2-2m_1)g}{4m_1 + m_2}$$

Din formulele generale rezultă imediat particularizările cerute.

3) Ecuația de mișcare a picăturii este

$$\frac{d(mv)}{dt} = mg \quad \text{sau} \quad a + \frac{v}{m} \cdot \frac{dm}{dt} = g \qquad (1)$$

Dar $m(t) = \alpha r^3(t)$; deci $\frac{dm}{dt} = 3\alpha r^2(t) \frac{dr}{dt} = \beta r^2(t)$; fiindcă aria picăturii este $4\pi r^2(t)$.

De aici deducem $\frac{dr}{dt} = A$ sau $r = At + B$; dar la $t = 0$ avem $r(0) = 0$; rezultă $B = 0$ și deci

$$r(t) = At$$

Mai departe $\frac{dm}{dt} \cdot \frac{1}{m} = \frac{3\alpha r^2 \frac{dr}{dt}}{\alpha r^3(t)} = \frac{3}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{3A}{At} = \frac{3}{t}$;

Ecuația de mișcare (1) se mai scrie

$a + \frac{3v}{t} = g$ sau $\frac{dv}{dt} + \frac{3v}{t} = g$; această ecuație diferențială are soluția generală

$v(t) = \frac{C}{t^3} + \frac{gt}{4}$; dacă avem în vedere că $v(0) = 0$ găsim $C = 0$; rezultă $v(t) = \frac{gt}{4}$

și accelerația picăturii este $a = g - \frac{3g}{4} = \frac{g}{4}$=constant.

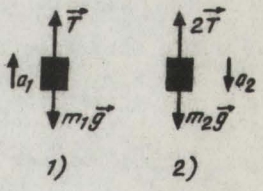


Fig.4.37.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Astfel cu g = 1o m/s^2, picătura are o mişcare uniform accelerată cu acceleraţia a = 2,5 m/s^2.

4) Forţa activă este F = $m_x \cdot g = \rho x g$. Forţa de frecare este F' = $\mu G = \mu (\ell - x) \rho g$. Fie m = $\ell \rho$

Atunci ecuaţia de mişcare se scrie:

$$ma = F - F', \quad \ell \rho a = gx - \mu(\ell - x)\rho g,$$

care ne dă:

$$a = \frac{g}{\ell}\left[x(1+\mu) - \mu\ell\right]$$

Pentru amorsarea mişcării, necesar şi suficient este să avem a > 0. Deci $x(1+\mu) - \mu\ell > 0$ sau

$$x > \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \ell$$

125. 1) $\mathcal{L}$) Considerăm o axă verticală Ox, dirijată în jos, pe care vom măsura poziţia capătului lanţului (vedeţi figura 4.8, pag. 277). Astfel poziţia capătului M al porţiunii de lanţ care atîrnă o vom determina cu ajutorul abscisei x = OM.

Pentru noi x va fi o funcţie de t, x: I $\subset [0, +\infty) \longrightarrow$ R, continuă şi de clasă C^2 pe I $\subset (0, +\infty)$

Teorema variaţiei energiei cinetice este exprimată matematic prin relaţia

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d\mathcal{L} \qquad (1)$$

unde m este masa totală a lanţului, v viteza lui M, iar $d\mathcal{L}$ este lucrul mecanic elementar efectuat de forţele care acţionează asupra lanţului.

Evident v: I $\subset [0, +\infty) \longrightarrow$ R este o funcţie de clasă C^1, iar $d\mathcal{L}$ = Fdx, unde F = m'g, m' = px.

De aceea partea stîngă a relaţiei (1) se scrie

$$d\left(\frac{mv}{2}\right)^2 = \frac{m}{2} dv^2 = \frac{m}{2} 2.v.dv = vmdv = p\ell v dv. \qquad (2)$$

Partea dreaptă se scrie şi ea $d\mathcal{L}$ = pxgdx (3)

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Folosind (2) şi (3), relaţia (1) devine

$$plvdv = px.gdx \qquad (4)$$

Folosind relaţiile $dx = vdt$ şi $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ în (4) găsim ecuaţia diferenţială care ne dă pe x(t):

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{l} \cdot x = 0. \qquad (5)$$

Desigur la ecuaţia (5) trebuie să adăugăm condiţiile iniţiale sau condiţiile lui Cauchy:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Relaţiile (5) şi (6) reprezintă modelul matematic al problemei noastre.

Ecuaţiei(5) îi asociem ecuaţia caracteristică

$$r^2 - \frac{g}{l} = 0,$$

care are două rădăcini reale şi distincte $r_1 = -\sqrt{\frac{g}{l}}$, $r_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, rădăcini care determină o bază în S (mulţimea soluţiilor ecuaţiei (5)):

$$x_1(t) = e^{r_1 t}, \quad x_2(t) = e^{r_2 t}.$$

Orice soluţie a lui (5) se va scrie acum

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad (7)$$

Impunînd funcţiei (7) condiţiile (6) deducem $C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2}$

iar x(t) se scrie

$$x(t) = \frac{x_0}{2}(e^{r_1 t} + e^{r_2 t})$$

dau încă $x(t) = x_0 \operatorname{ch}(\sqrt{\frac{g}{l}}.t)$, $t \in I \subset [0, +\infty)$.

Lanţul va părăsi planul orizontal AB, la un moment (teoretic) τ, atunci cînd $x(\tau) = l$

Punînd această condiţie deducem

$$l = x_0 \operatorname{ch}(\sqrt{\frac{g}{l}}\,\tau),$$

de unde

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \operatorname{arg\,ch}\left(\frac{l}{x_0}\right).$$

β) Studiul tensiunii în lanț în punctul C.

Vom scrie legea a doua a lui Newton pentru porțiunea de lanț MC sub acțiunea forțelor $\vec{P}$ și $\vec{T}$ (tensiunea din lanț):

$$m_1 a_1 = P - T,$$

unde

$$m_1 = (x-x_0)p, \quad P = (x-x_0)pg, \quad a_1 = \frac{d^2x}{dt^2} \left(= \frac{g}{l} x \right).$$

Atunci T devine

$$T = (x-x_0)pg - \frac{g}{l} \cdot x(x-x_0)p \quad \text{sau}$$

$$T = pg(x-x_0)\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \text{sau}$$

$$T = pg(x-x_0)(l - x)/l.$$

Întrucît T este un polinom de gradul al doilea în raport cu x, aceasta prezintă un maxim pentru $\tilde{x} = \frac{x_0 + l}{2}$ și acest maxim are valoarea

$$T_{max} = \frac{pg(l - x_0)^2}{4l}.$$

2) α). Folosim teorema energiei între A și A' (vedeți figura 4.38.):

$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgh$, care ne dă $V_0^2 = v_0^2 + 2gh$.

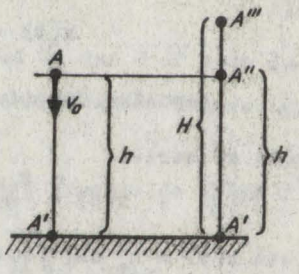


Fig.4.38.

β) Aceeași teoremă o folosim între A' A'' A''': $\frac{mV_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgH$, de unde

$$H = \frac{v_0^2 + 2gh}{2g} = h + \frac{v_0^2}{2g}$$

γ) Calculăm timpul t' în care mobilul parcurge, la urcare, distanța h, folosind legea $x = V_0 t - \frac{1}{2} gt^2$.

Astfel cu x = h, găsim ecuația

$$h = V_0 t' - \frac{1}{2} g(t')^2 \quad \text{sau} \quad g(t')^2 - 2V_0 t' + 2h = 0,$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

care ne dă

$$t' = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2gh}}{2g} = \frac{V_0 - v_0}{2g}$$

Acum formula vitezei, $v = V_0 - gt$, cu t' precedent ne dă $v' = \frac{V_0 + v_0}{2}$

δ) La urcare avem legea

$$\begin{cases} x = V_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \\ v = V_0 - gt \end{cases}$$

In punctul de maxim, $v = 0$, deci $t = \frac{V_0}{g}$ și astfel

$$t_{urcare} = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

La coborîrea inițială am avut legea:

$$\begin{cases} y = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \\ v = v_0 + gt. \end{cases}$$

La impactul cu solul $y = h$ și $v = V_0$.

Deci $t_{coborîre} = \frac{V_0 - v_0}{g}$

Timpul total de coborîre și de urcare este

$$T = t_{urcare} + t_{coborîre} = \frac{2V_0 - v_0}{g}$$

3) Alegem sistemul de axe din figură. Legea de mișcare a particulei este

$m\ddot{x} = -mg - mkv^2$ sau

$\frac{dv}{dt} = -(g+kv^2)$. Dar $\frac{dx}{dt} = v$; $dt = \frac{dx}{v}$; deci avem

$vdv = -(g+kv^2)dx$ sau

$\frac{2vdv}{g+kv^2} = -2dx$ sau $\frac{2vdv \cdot k}{g+kv^2} = -2kdx$. Integrăm și găsim:

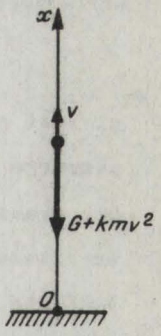


Fig.4.39.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$g+k.v^2 = Ce^{-2kx};$$

dar $x = 0 \Longrightarrow v = v_0$; deci $C = g + kv_0^2$

Rezultă:

$$g + kv^2 = (g + kv_0^2)\, e^{-2kx}, \text{ de unde } v^2 = \frac{g+kv_0^2}{k}\, e^{-2kx} - \frac{g}{k}$$

Acum aplicăm teorema energiei și găsim

$$\frac{mv^2 - mv_0^2}{2} = L$$

sau direct:

$$L = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{g+kv_0^2}{k}\right)e^{-2kh} - \frac{g}{k} - v_0^2\right) = \frac{m}{2k}(g+kv_0^2)(e^{-2kh} - 1) < 0.$$

Altfel:

$$L = \int_0^h \vec{F}d\vec{r} = -\int_0^h \left(mg + mk\left(\frac{g+kv_0^2}{k}\, e^{-2kx} - \frac{g}{k}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{m}{2k}(g + kv_0^2)(e^{-2kh} - 1).$$

4) Cazul funcționării succesive a motoarelor M_1 și M_2: Intîi funcționează motorul M_1 timpul t_1. La sfîrșitul timpului t_1 racheta a parcurs spațiul $S_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$ și a căpătat viteza $V_1 = a_1 t_1$. După scurgerea timpului t_1, racheta se mai mișcă un timp t_2 (secunde) și parcurge spațiul $S_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + (a_1 t_1) \cdot t_2$, $V_1 = a_1 t_1$ servind de viteză inițială.

Spațiul parcurs de racheta pe verticală (în sus) este deci

$$H = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + \frac{1}{2}a_2 t_2^2 + a_1 t_1 t_2 \qquad (1)$$

Cazul funcționării simultane a motoarelor M_1 și M_2

In această situație forțele dezvoltate de M_1 și M_2 se adună și deci și accelerațiile se adună. Astfel în timpul t_1 (secunde) racheta parcurge spațiul $s_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)t_1^2$ și ajunge să aibă viteza $v_1 = (a_1+a_2)t_1$. Dar racheta mai are de mers de aici înainte încă $t_2 - t_1$ secunde pornind cu viteza inițială v_1 și accelerația a_2. De aceea în decursul timpului $t_2 - t_1$ ea parcurge spațiul $s_2 = \left[(a_1+a_2)t_1\right](t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a_2 (t_2 - t_1)^2$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Astfel spaţiul parcurs de rachetă pe verticală (în sus) este
$h = s_1+s_2 = \frac{1}{2}(a_1+a_2)t_1^2 + (a_1+a_2)t_1(t_2-t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2-t_1^2)$ sau

$$h = -\frac{1}{2}a_1t_1^2 + \frac{1}{2}a_2t_2^2 + a_1t_1t_2 \qquad (2)$$

Comparînd formulele (1) cu (2), rezultă $H > h$ şi deci funcţionarea succesivă a motoarelor M_1 şi M_2 ale rachetei face ca aceasta să atingă o înălţime mai mare decît în cazul funcţionării simultane a acestor motoare.

126. 1) Ne vom plasa în ipoteza cea mai simplă: vom reduce lada L la un punct material O, în care vor acţiona forţele următoare: $\vec{\phi}$ forţa de frecare, $\vec{G}$ greutatea lăzii, forţa $\vec{F}$ aplicată şi $\vec{N}$ reacţiunea planului asupra lăzii.

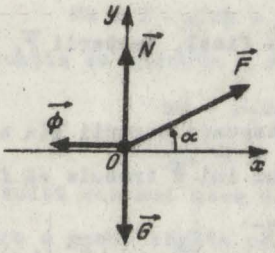


Fig.4.4e.

In ipoteza că lada se mişcă uniform, pe planul orizontal va trebui să avem:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\phi} + \vec{G} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Relaţia (1) proiectată pe o axă verticală, de pildă pe Oy, ne dă

$$F \sin\alpha + N = G, \qquad (2)$$

iar pe una orizontală $F\cos\alpha = \phi$ (3)

Cu $\phi = \mu N$, din (2) şi (3) găsim pe F:

$$F = \frac{\mu G}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} \qquad (4)$$

Relaţia (4) ne arată că F va fi minim cînd

$$f(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha \qquad (5)$$

va fi maxim. Pentru studiul lui $f(\alpha)$ alcătuim tabloul de variaţie

α	0		arctg μ		$\pi/2$
$f'(\alpha)$		++++++++	0	---------	
$f(\alpha)$	1	↗	maxim	↘	μ

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Rezultă că F este minim pentru $\alpha = \varphi =$ arctg μ și va acționa perpendicular pe $\vec{R} = \vec{N} + \vec{\phi}$.

Observație. La același rezultat, $\vec{F} \perp \vec{R}$, ajungem dacă procedăm și pe cale grafică (vedeți figura 4.41).

Mai întîi observăm că reacțiunea $\vec{R}$ face cu $\vec{N}$ un unghi φ constant, definit de $tg\varphi = \mu$. De asemenea și $\vec{G}$ are o direcție fixă. Figurăm vectorul $\vec{G}$ și prin extremitatea B a lui ducem o dreaptă (d) sub azimutul φ, care va fi supertul lui $\vec{R}$ (vedeți fig.4.42.):

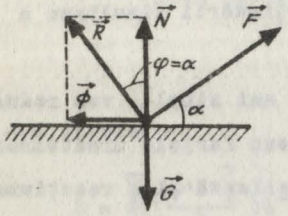


Fig.4.41.

În vîrful B al lui $\vec{G}$ punem originea vectorului $\vec{R}$ (sau $\vec{R}'$ sau $\vec{R}''$).

Vectorii $\vec{G}$, $\vec{R}$ și $\vec{F}$ trebuie să formeze un triunghi.

De aceea drept soluție putem avea, în final, vectorii $\vec{F}$, $\vec{F}'$ sau $\vec{F}''$ (vedeți figura 4.42.)

Dintre acești vectori, cel care corespunde cererii din enunț este acela cu modul cel mai mic. Astfel supertul lui $\vec{F}$ trebuie să fie perpendicular pe direcția (d) a lui $\vec{R}$, căci distanța lui A la (d) numai astfel este minimă, distanță care este egală cu intensitatea lui $\vec{F}$ la o anumită scară.

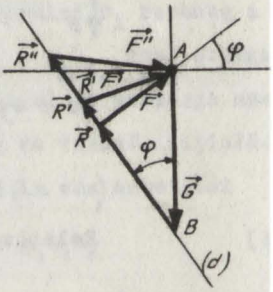


Fig.4.42.

2) Teorema impulsului $\dot{\vec{H}} = \sum \vec{F}$ se scrie

$$\frac{dH}{dt} = Q - \phi \ , \quad \phi = \mu mg \text{ sau}$$

$$dH = (Q - \mu mg)\, dt \ .$$

In termeni finiți avem $H(t) - H(0) = (Q - \mu mg)(t - 0)$

Dar $H(0) = 0$ și $H(t) = mv$.

Deci $mv = (Q - \mu mg)t$, de unde găsim

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

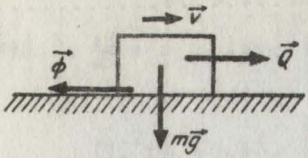


Fig.4.43.

$t = \frac{mv}{Q-\mu mg}$; în cazul aplicației avem

$t = \frac{4\,000 \cdot 0{,}5}{6000 - 0{,}1.4000.10} = \frac{2\,000}{2\,000} = 1$ secundă.

3) Legea a doua a lui Newton ne dă

$m\ddot{x} = -\mu mg$ sau $\ddot{x} = -\mu g$ cu $x(0) = 0$ și $\dot{x}(0) = v_0$; integrînd obținem

$x(t) = v_0 t - \mu g \frac{t^2}{2}$, $v(t) = v_0 - \mu g t$, $t \geq 0$, la oprire avem $v(\tau) = 0$; deci timpul după care corpul se oprește este $\tau = \frac{v_0}{g}$, iar spațiul parcurs pînă la oprire este $x(\tau) = d \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{2\mu g} \Longrightarrow v_0 = \sqrt{2g\mu d}$.

4) Presupunem că scîndura și cărămida se mișcă împreună. Ecuația de mișcare a scîndurii este:

$Ma = F - \mu_1 mg - \mu_2(M+m)g$, iar

ecuația de mișcare a cărămizii se scrie

$ma = \mu_1 mg$.

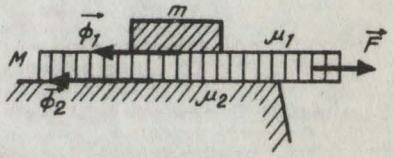


Fig.4.44.

Ori $\mu_1 mg = 0{,}25\,mg$; de aici rezultă cea mai mare accelerație pe care o poate căpăta cărămida (împreună cu scîndura) $a = \mu_1 g = 0{,}25\,g$. Astfel $F = M.a + \mu_1 mg + \mu_2(M+m)g =$
$= 0{,}25\,g + 0{,}5\,g + 0{,}5.3.g = 2{,}25\,g$ (newtoni)
este forța maximă care aplicată scîndurii face ca aceasta să se miște împreună cu cărămida ca un singur corp.

Prin urmare F căutat este $\leq 2{,}25\,g$ (newtoni).

5) Aplicăm teorema impulsului în proiecție pe orizontală:

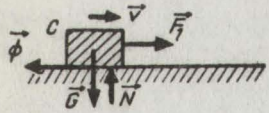


Fig.4.45.

$H_{final} - H_{inițial} = Ft$, cu $H_{final} = mv$,

$H_{inițial} = 0$, $F = F_1 - \mu G$.

Rezultă $t = \frac{mv}{F_1 - \mu G}$.

6) α) Fie O punctul de pe suprafața S din care își începe mișcarea corpul C și Ox axa pe care el se mișcă. După aplicarea forței

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$F = 10\ N$, corpul se mişcă uniform accelerat şi avem:

$$\text{La } t = 0 \begin{cases} x=0 \\ v=v_0=5 \\ a = \frac{F}{m} = \frac{10}{m} \end{cases} ; \text{ la momentele } t>0 \begin{cases} x(t) = 5t + \frac{10}{2m} t^2 \\ v(t) = 5 + \frac{10}{m} t; \\ E_c(t) = \frac{mv^2(t)}{2} \end{cases}$$

$$\text{la } t = 10\ s \begin{cases} x(10) = 50 + \frac{500}{m} \\ v(10) = 5 + \frac{100}{m} \\ E_c(10) = 1000 \end{cases}$$

Din $E_c = 1000$ sau din $\frac{m}{2}(5 + \frac{100}{m})^2 = 1000$ găsim $m = 20$ kg.

β) $x(t) = 5t + \frac{1}{4} t^2$; $x(10) = 75$ m

γ) $L(t) = Fx(t) = 5mt + \frac{5t^2}{2}$; $L(10) = 750$ J

δ) $\Delta H(t) = mv - mv_0 = 20\ t$; $\Delta H(10) = 200$ kg $\frac{m}{s}$

7) Luăm ca origine a energiilor potenţiale axa $x'Ox$. In A punctul P are energia potenţială $E_{pA} = mga$, iar în B, $E_{pB} = -mga$.

In plus în B punctul are şi o energie cinetică $E_{CB} = \frac{mv^2}{2}$

După legea de conservare a energiei scriem $E_{pA} = E_{pB} + E_{CB}$, adică

$$mga = \frac{mv^2}{2} - mga$$

de aici găsim $v^2 = 4ag$.

In B avem

$$R = mg + \frac{mv^2}{\rho_C}, \text{ unde } \rho_C = \left| \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \right| = a$$

Deci

$$R = mg + \frac{4mag}{a} = 5mg.$$

127. 1) Calculăm viteza punctului M:

$\dot{x} = ak\,sh(kt)$, $\dot{y} = bk\,ch(kt)$; $v^2 = K^2(a^2 sh^2(kt) + b^2 ch^2(kt))$

şi acceleraţia

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$\ddot{x} = ak^2 ch(kt)$; $\ddot{y} = bk^2 sh(kt)$; $a = k^2\sqrt{x^2+y^2} = k^2 r$,

dacă notăm cu r pe $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Acum $\vec{F} = m\vec{a} = mk^2(x\vec{i} + y\vec{j}) = mk^2\vec{r}$.

Deci este vorba de o <u>forță centrală.</u>

Calculăm $\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$ și găsim:

$$\vec{r} \times m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ach(kt) & bsh(kt) & 0 \\ aksh(kt) & bkch(kt) & 0 \end{vmatrix} = m(abk)\vec{k}.$$

Astfel găsim că momentul cinetic $\vec{K} = (mabk)\vec{k}$ este constant Aceasta e o mărime mecanică (dinamică) care se conservă în timpul mișcării.

Observăm că $\vec{F}$ derivă din funcția de forță

$U = m.k^2(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})$, fiindcă $\vec{F} = grad\ U$.

Atunci $V = -U$ este energia potențială și teorema energiei se scrie:

$$d(\frac{mv^2}{2}) = \vec{F}d\vec{r} = grad\ U.d\vec{r} = -grad\ V\ d\vec{r} = -dV \quad sau$$

$$d(\frac{mv^2}{2} + V) = 0 \quad sau \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mk^2}{2}(x^2 + y^2) = constant\ sau$$

$$\frac{m}{2}\left[k^2(a^2sh^2kt + b^2ch^2kt) - k^2(a^2ch^2kt + b^2sh^2kt)\right] = constant$$

sau

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mk^2r^2}{2} = \frac{mk^2}{2}(b^2-a^2) = constant.$$

Deci $E_{cin} + V = \frac{mk^2}{2}(b^2-a^2)$, $\forall t \geq 0$

Deci în această mișcare și energia totală a punctului e o mărime care se conservă.

Recapitulînd putem spune că în aceasta mișcare se conservă momentul cinetic și energia totală a punctului considerat.

2) Se știe că

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ a_\varepsilon = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\dot{\varphi}) = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \end{cases}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Conform enunțului avem:

$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$; deci ecuația diferențială verificată de r este

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0.$$

Soluția ei generală este $r(t) = C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t}$

Constantele C_1 și C_2 le determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} r = r_0 \\ \dot{r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = r_0 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow C_1 = C_2 = \frac{r_0}{2}$$

Deci: $r = r_0 \operatorname{ch}(\omega t)$, $\varphi = \omega t$, $t \geq 0$.

Acum accelerația a va fi:

$$a = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2 r_0 \omega^2 \operatorname{sh}\omega t, \quad t \geq 0$$

128. 1) Egalînd săgeata cu bătaia găsim:

$\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$; de aici rezultă $\operatorname{tg}\alpha = 4$ și $\alpha \simeq 76^\circ$.

2) Din (1) prin derivare în raport cu t deducem

(2) $\quad \vec{v}_1(t) = \vec{v}_{1_0} + \vec{g}t \quad$ și $\quad \vec{v}_2(t) = \vec{v}_{2_0} + \vec{g}t.$

Din (2), prin scădere obținem

$$\vec{v}_r = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t) = \vec{v}_{1_0} - \vec{v}_{2_0}$$

adică un vector constant ca mărime și ca direcție, dat fiind că $\vec{v}_{1_0}$ și $\vec{v}_{2_0}$ sînt vectori fixați.

3) Alegem axele din figura alăturată.

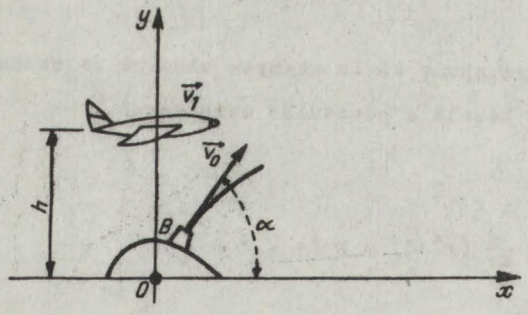


Fig.4.46.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Legea de mişcare a proiectilului este

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} gt^2, \text{ iar a avionului } x_1 = v_1 t \end{cases}$$

şi $y_1 = h$.

Cînd proiectilul loveşte avionul avem:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} v_0 \cos\alpha \cdot t^* = v_1 t^* \\ v_0 \sin\alpha \cdot t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{v_1}{v_0} \\ t^* = \frac{1}{g}\left[v_0 \cdot \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}\right] \end{cases}$$

Astfel lovirea va avea loc dacă

a) $\cos\alpha = \frac{v_1}{v_0} \rightarrow \alpha = \arccos \frac{v_1}{v_0}$ şi

b) $v_0^2 \sin^2\alpha \geq 2gh \Longrightarrow v_0^2 \geq v_1^2 + 2.gh$.

In cazul numeric avem $v_1 = 400$ m/s şi $\alpha \cong 57°$, iar $v_0 \geq 743$ m/s.

129. 1) In această problemă avem o aruncare orizontală a unui corp ($\alpha = 0$) cu viteza v_0. Deci proiectilul are legea de mişcare $x(t) = v_0 t$, $y(t) = h - \frac{1}{2} . gt^2$. Fie τ momentul în care proiectilul loveşte ţinta; atunci $y = 0$, i.e. $h = \frac{1}{2} g \tau^2$, respectiv $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ şi astfel $x_1 = v_0 \tau = \sqrt{\frac{2v_0^2 h}{g}}$. In cazul aplicaţiei numerice avem $\tau \cong 14,14$ s.

$x_1 = \sqrt{\frac{2.(100)^2.1000}{9,81}} \cong 1\,428$ m.

2) i) Am văzut că bătaia este $b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Cu datele numerice obţinem $b \cong 432,57$ m.

Pe de altă parte $b = v_0 \tau \cos\alpha$. Din aceste relaţii deducem durata totală de traiect:

$$\tau = \frac{2\, v_0 \sin\alpha}{g} \cong 12,359 \text{ secunde}$$

ii) Fie P punctul de pe traiectorie care are abscisa $x = 100$ m. Inlocuind $x = 100$ m în $x = v_0 . t^* \cos\alpha$, găsim $t^* = 2,85$ secunde = durata de traiect pînă în P.

Apoi componentele vitezei în acest punct P sînt:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\begin{cases} \dot{x} = 35 \\ \dot{y} = 6e,55 - gt^{*} \end{cases}$$

Cu $t = 2,85$ secunde, găsim $\dot{x}(t^{*}) = 35$ și $\dot{y}(t^{*}) = 32$. Deci $v(t^{*}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 47,8$ m/s, care reprezintă modulul vitezei proiectilului în P.

iii) Bătaia maximă se atinge la $\alpha = 45^{\circ}$ și anume $b_{max} = v_0^2/g = 49e$ m.

3) Considerăm un sistem de axe de coordonate cu originea în O, locul în care se află tunul. Atunci conform cu legile aruncării oblice avem (vedeți figura 4.13.):

$$P: \begin{cases} x = v_0 t \cdot \cos\alpha \\ y = v_0 t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2 \end{cases}$$

Dar obuzul $P(x,y)$ lovește avionul $A(u,h)$; deci

$$\begin{cases} u = v_0 t \cos\alpha \\ h = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2, \text{ pentru un anume } t. \end{cases}$$

De aici deducem, eliminînd pe α

$$u^2 + (h + \tfrac{1}{2} gt^2)^2 = v_0^2 t^2, \text{ respectiv}$$

$$\tfrac{1}{4} g^2 t^4 + (gh - v_0^2) t^2 + h^2 + u^2 = 0.$$

O condiție necesară și suficientă ca această ecuație să aibă rădăcini reale în t este

$$\Delta \geq 0, \text{ i.e. } (gh - v_0^2)^2 \geq g^2(h^2 + u^2) \quad \text{sau}$$

$$g^2 u^2 \leq v_0^2(v_0^2 - 2gh), \quad v_0^2 \geq 2gh \quad \text{sau}$$

$$u \leq \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gh},$$

ceea ce ne arată că tunul se află la o distanță u de locul loviri nu mai mare decît

$$\frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

13e. 1) Se ştie că bătaia armei de foc este

$$b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Fie $\sin\theta = \frac{b \cdot g}{v_0^2} < 1$. Atunci avem de rezolvat ecuaţia $\sin 2\alpha = \sin\theta$. De aici găsim $2\alpha_1 = \theta$ sau $2\alpha_2 + \theta = \pi$

Evident $2\alpha_2 + 2\alpha_1 = \pi$ şi astfel am pus în evidenţă existenţa a două unghiuri α_1, α_2, complementare, sub care trăgînd putem lovi o ţintă terestră dată.

2) Folosim formula care ne dă bătaia gurii de foc; în primul caz avem

$$b = \frac{v_0^2 \sin 26^\circ}{g},$$

iar în al doilea

$$b' = \frac{v_0^2 \sin 26^\circ 4e'}{g}.$$

De aici deducem

$$b' = b \frac{\sin 26^\circ 4e'}{\sin 26^\circ}$$

Cu $b = 63oo$ m, obţinem $b' = 6449{,}9$ m.

Astfel o eroare de 2e' în estimarea lui $\alpha = 13^\circ$ ne-a condus la o abatere în lovirea ţintei de 149,9 m.

3) Ecuaţia cartesiană a traiectoriei urmată de un obuz (cu $\alpha = 45^\circ$) este (vedeţi figura 4.47.)

$$y = x - \frac{gx^2}{v_0^2} \qquad (1)$$

Punem condiţia ca punctul B să se afle pe parabola de ecuaţie (1). Rezultă ecuaţia în b:

$$b^2 - 1e^5 b - 3.1e^6 = 0$$

cu rădăcina acceptabilă $b \simeq 1$ 1oo km.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

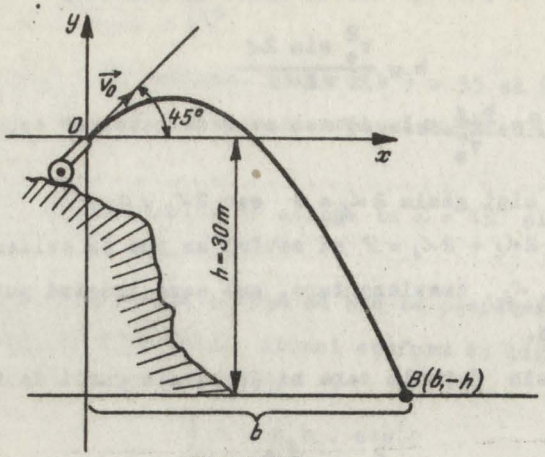


Fig.4.47.

4) Calcule imediate ne conduc la:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha_0 \\ \dot{y} = v_0 \sin\alpha - gt; \end{cases} \qquad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \qquad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \quad ; \; a_\tau = \dot{v};$$

$$a_\nu^2 = a^2 - a_\tau^2 \quad ; \; a_\nu = \frac{v^2}{\rho_c} \Rightarrow \rho_c(t) = \frac{v^3(t)}{v_0 g \cos\alpha_0}.$$

La $t = 0$ găsim raza de curbură $\rho_c = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha_0}$, iar la $t = \tau$ cînd proiectilul atinge Pămîntul avem

$$\rho_c(\tau) = \frac{v^3(\tau)}{g \cdot v_0 \cos\alpha_0} \quad , \text{ cu } \tau = \frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g} \quad , \text{ adică}$$

$$\rho_c(\tau) = \rho_c(0) = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha_0}.$$

131. 1) Descompunem viteza inițială $\vec{v}_0$ după axele Ax și Ay:

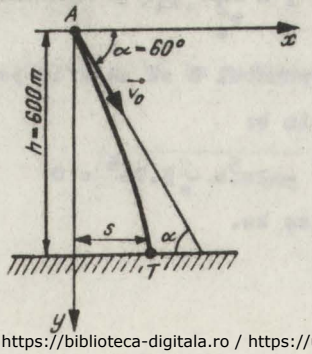


Fig.4.48.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$v_{ox} = v_o \cos\alpha ; \; v_{oy} = v_o \sin\alpha$$

In direcţia axei Ox avem

$v_x(t) = v_{ox} = v_o \cos\alpha$, iar în direcţia axei Oy;

$$v_y = v_{oy} + gt, \text{ respectiv}$$

$$\begin{cases} x = (v_o \cos\alpha)t \\ y = v_{oy}t + g\frac{t^2}{2} \end{cases}$$

Dacă înlocuim $y = h$ şi $t = t'$, găsim o ecuaţie în t'

$$gt'^2 + 2v_{oy}t' - 2h = 0,$$

care ne dă timpul t' de cădere a bombei. Deci

$$t' = -\frac{v_{oy}}{g} + \sqrt{(\frac{v_{oy}}{g})^2 + 2\frac{h}{g}}$$

In acest timp bomba parcurge distanţa S măsurată pe orizontală.

Deci $S = v_{ox} \cdot t' = -\frac{v_{ox}v_{oy}}{g} + v_{ox}\sqrt{(\frac{v_{oy}}{g})^2 + 2\frac{h}{g}}$.

Cu datele numerice găsim $S \simeq 49e$ m.

Deci avionul de la o distanţă de 49e m de ţintă, măsurată pe suprafaţa Pământului, trebuie să lanseze bomba pentru ca ea, în cădere, să lovească ţinta T.

2) Ecuaţia unei traiectorii corespunzătoare la un $\vec{v}_o$ dat şi la un α oarecare, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, este

$$y = x \cdot tg\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_o^2 \cos^2\alpha} \qquad (1)$$

Rezolvarea problemei puse revine la a determina înfăşurătoarea familiei de parabole (1). Fie

$$F(x,y,\alpha) : = -y + xtg\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_o^2 \cos^2\alpha}$$

caz în care ecuaţia (1) se scrie sub forma $F(x,y,\alpha) = 0$ (2)

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Determinarea înfăşurătoarei familiei de curbe (2) revine la eliminarea lui α între ecuaţiile:

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha) = 0 & \text{şi} \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x,y,\alpha) = 0 \end{cases}$$

adică între

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \equiv \frac{x}{\cos^2\alpha} - \frac{gx^2 \sin\alpha}{v_0^2 \cdot \cos^3\alpha} = 0 \\ F(x,y,\alpha) = 0. \end{cases}$$

Dacă face această eliminare găsim următoarea parabolă

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

numită şi <u>parabola de siguranţă</u>.

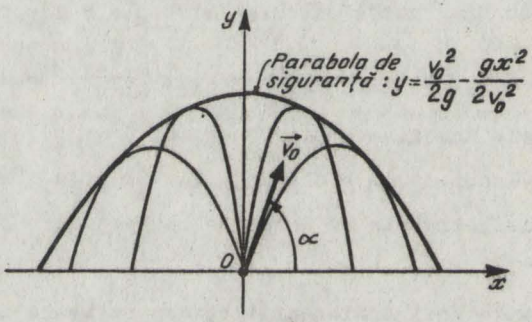


Fig.4.49.

Sensul acestei denumiri rezultă din cele ce urmează.

Observăm că această parabolă împarte semiplanul $y \geqslant 0$ în două regiuni: una interioară şi alta exterioară parabolei de siguranţă; punctele din interior pot fi lovite prin trageri din O cu viteza v_0 dată, sub un anumit unghi, în timp ce punctele din exteriorul ei nu pot fi lovite, dacă tragem asupra lor cu proiectile cu viteza iniţială v_0.

Acest exemplu pune în evidenţă importanţa mărimii vitezei v_0 a proiectilului la ieşirea din gura de foc. Pentru a lovi ţinte îndepărtate, ne trebuie un v_0 cît mai mare.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) α) Folosind formulele teoretice cu $v_0 = 14$ și $\cos\alpha = \sin\alpha = \sqrt{2}/2$, rezultă (vedeți figura 4.15):

$$x(t) = 7\sqrt{2}\, t, \quad t \geq 0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot gt^2 + 7\sqrt{2}\, t + 49, \quad t \geq 0.$$

β) Viteza $\overline{v}$ are componentele:

$$\begin{cases} v_x = 7\sqrt{2} \\ v_y = -9{,}8 \cdot t + 2\sqrt{7}, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

In punctul B avem $v_y = 0$; rezultă $t_B = \left(\frac{9{,}8}{7\sqrt{2}}\right)^{-1} = (0{,}98)^{-1}$ s =

= 1,02 secunde.

Ordonata lui B este

$$y_B = 49 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot \frac{49 \cdot 2}{9{,}8^2} + \frac{7\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{9{,}8} =$$

$$= 49 - \frac{49}{9{,}8} + 2 \cdot \frac{49}{9{,}8} = 49 + 5 = 54 \text{ m}.$$

In punctul B avem:

$$v_x = 7\sqrt{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{9{,}8} = \frac{49 \cdot 2}{9{,}8} = \frac{98}{9{,}8} = 10 \text{ m/s};$$

deci

$$v_B = v_x = 10 \text{ m/s}.$$

γ) In momentul în care corpul atinge solul în C avem $y_C = 0$ i.e.

$$-\frac{1}{2} gt^2 + 7\sqrt{2}\, t + 49 = 0 \quad \text{sau}$$

$$7t^2 - 10\sqrt{2} \cdot t - 70 = 0$$

De aici găsim rădăcina pozitivă

$$t_C = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{50 + 490}}{7} \simeq 4{,}33 \text{ secunde}$$

Bătaia (sau abscisa lui C) este

$$b = 7 \cdot \sqrt{2} \cdot 4{,}33 = 42{,}86 \text{ m};$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

δ) $\begin{cases} v_{xC} = 7\sqrt{2} = 9,8994 \text{ m/s}; \\ v_{yC} = 7\sqrt{2} - 9,8 \cdot t_C = 7\sqrt{2} - 9,8 \cdot 4,33 = -32,5 \text{ m/s}; \end{cases}$

$$v\Big|_C = \sqrt{v_{xC}^2 + v_{yC}^2} = \sqrt{97,99812 + 1056,25} = 33,98 \text{ m/s}.$$

Acum $tg\alpha = \left|\frac{v_{yC}}{v_{xC}}\right| = \frac{32,5}{9,89} = 3,27$; $\alpha \cong 73^0$ (fig.4.50.)

4) a) Folosim ecuaţia carteziană a traiectoriei (fig.4.51.)

$$y = x\,tg\alpha - \frac{gx^2}{2 \cdot v_0^2 \cos^2\alpha},$$

care cu $y = -h$ şi $x = s$ ne dă $v_0 = \frac{s}{2\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{h+s \cdot tg\alpha}}$.

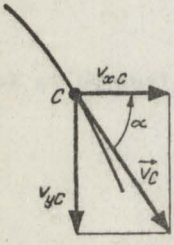


Fig.4.50.

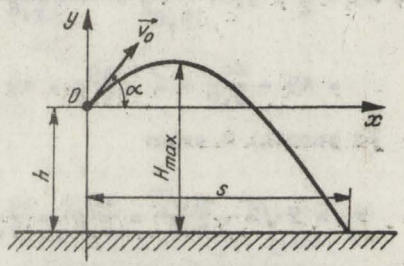


Fig.4.51.

b) Timpul de traiect este $\mathcal{T} = \frac{s}{v_0 \cos\alpha} = \sqrt{\frac{2(h+s \cdot tg\alpha)}{g}}$

c) $H_{max} = h +$ săgeata $= h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{(2h+s\,tg\alpha)^2}{4(h+s\,tg\alpha)}$.

132. 1) In cazul avionului cu reacţie $v = \frac{900}{3,6} = 250$ m/s şi deci $\frac{mv^2}{\rho_{cr}} = 5 \cdot mg$; de aici găsim $\rho_{cr} = \frac{250 \cdot 250}{50} = 1250$ m.

In cazul avionului cu elice $v = 360$ km/h $= \frac{360}{3,6}$ m/s $= 100$ m/s.

Deci $\frac{mv^2}{\rho_{ce}} = 5 \cdot mg$, care ne dă $\rho_{ce} = 200$ m.

2) Considerăm că punctul P pleacă din O. Fie $(x(t), y(t))$, $t \in I$, coordonatele lui P. Un vector $\vec{v}_1$, tangent la traiectorie, are proiecţiile $(x'(t), y'(t))$, iar un vector normal pe $\vec{v}$ este vectorul $\vec{v}_1(y'(t), -x'(t))$. Modulul lui $\vec{v}_1$ ca şi al lui $\vec{v}$ este chiar v. De

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

acesa $\vec{F} = c\vec{v}_1$, unde c e o constantă fizică de proporţionalitate.

Cea de a doua lege a lui Newton, sub formă vectorială, este

$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + c\vec{v}_1$, iar în proiecţii pe axe se scrie

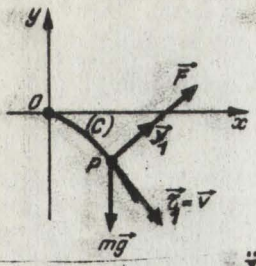


Fig.4.52

$$\ddot{x}(t) = c\dot{y}(t)$$

$$\ddot{y}(t) = -g - c\dot{x}(t), \text{ unde } c = \frac{k}{m} \text{ şi}$$

$$x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Prin derivare după timp şi eliminarea lui $\ddot{y}$, găsim ed verificată de x:

$$\dddot{x} + c^2\dot{x} = -cg \text{ cu soluţia generală } x(t) = -\frac{gt}{c} +$$

$$+ C_1 \sin ct + C_2 \cos ct + C_3$$

Dacă punem condiţiile iniţiale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 0$, găsim

$$x(t) = \frac{g}{c^2}\sin(ct) - \frac{gt}{c}, \quad t \geq 0 \text{ şi apoi}$$

$$y(t) = \frac{g}{c^2}(-1 + \cos(ct)), \quad t \geq 0 \text{ (o cicloidă).}$$

3. $\mathcal{L}$) Reacţiunea din partea tubului eliptic în P este normală la traiectorie (vedeţi fig.4.16.).

Astfel cu ajutorul teoremei energiei, aplicată între punctele B şi A mai întîi, apoi între B şi B', calculăm v_A şi $v_{B'}$. Avem efectiv

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = mg(y_B - y_A)$$

$$\frac{1}{2}mv_{B'}^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = mg(y_B - y_{B'}),$$

respectiv

$$v_A = \sqrt{2gb}, \quad v_B = 2\sqrt{gb}.$$

Evident $\vec{v}_A$ şi $\vec{v}_{B'}$ sînt dirijate după tangentele în vîrfurile A şi B' la traiectorie.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Acceleraţia în A. In punctul A proiecţia ecuaţiei $m\vec{a} = \vec{F}$ pe axa Oy ne dă acceleraţia tangenţială $m\ddot{y} = -mg$ sau $a_{\tau A} = -g$.

Acceleraţia normală în A va fi

$$a_{\nu A} = \frac{v_A^2}{\rho_A}, \text{ unde } \rho_A = \frac{b^2}{a} \text{ (se calculează uşor).}$$

Deci $a_{\nu A} = \frac{2gb}{\frac{b^2}{a}} = 2g \cdot \frac{a}{b}$

Deci $\vec{a}_A$ are componentele:

$$\begin{cases} a_{\tau A} = -g \\ a_{\nu A} = 2g\frac{a}{b}; \end{cases} \qquad a_A = \sqrt{g^2 + 4g^2\frac{a^2}{b^2}}.$$

Acceleraţia în B': In B' reacţiunea $\vec{N}$ şi $m\vec{g}$ sînt dirijate după Oy. Proiectînd legea $m\vec{a} = \vec{F}$ pe Ox găsim $m\ddot{x} = 0$, deci $a_{\tau B'} = 0$. Acum $a_{\nu B'} = \frac{v_{B'}^2}{\rho_{B'}}$, unde $\rho_{B'} = \frac{a^2}{b}$ (se calculează uşor); deci $a_{\nu B'} = \frac{4gb}{\frac{a^2}{b}} = 4 \cdot g\,\frac{b^2}{a^2}$. Astfel $\vec{a}_{B'}$ are componentele

$$\begin{cases} a_{\tau B'} = 0 \\ a_{\nu B'} = 4 \cdot g \cdot \frac{b^2}{a^2} \end{cases}; \quad a_B = 4g\,\frac{b^2}{a^2}.$$

Vitezele unghiulare. In vîrful B al elipsei avem $a\,\omega_A = v_A$; deci $\omega_A = \frac{\sqrt{2gb}}{a}$; în B' avem $b\,\omega_{B'} = v_{B'}$, respectiv $\omega_{B'} = \frac{2\sqrt{gb}}{b}$.

Vitezele areolare. Conform cu definiţia vitezei areolare, $\Omega = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times m\vec{v}\right|$, avem

$$\Omega_A = \frac{1}{2}\,a.m.\,v_A \quad (\text{fiindcă } \vec{r}_A \perp \vec{v}_A)$$

$$\Omega_{B'} = \frac{1}{2}\,bm \cdot v_{B'} \quad (\text{fiindcă } \vec{r}_{B'} \perp \vec{v}_{B'}).$$

133. 1) Intersectînd planul vertical prin O cu P şi cu cel orizontal obţinem dreptele OP şi Ox.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Ecuația fundamentală $m\vec{a} = \vec{F}$, i.e. $m\vec{a} = m\vec{g}$, în proiecții pe cele două axe se scrie:

$$m\ddot{x} = 0 \quad \text{și} \quad m\ddot{y} = -mg \ .$$

Integrînd acest sistem și punînd condițiile inițiale:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0\cos(\varphi + \theta)$$

$$y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = v_0\sin(\varphi + \theta),$$

obținem

$$M: \begin{cases} x(t) = v_0 . t . \cos(\varphi + \theta) \\ y(t) = v_0 . t . \sin(\varphi + \theta) - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Ecuația carteziană a traiectoriei se obține din (1) prin eliminarea lui t; rezultă:

$$y = x\,tg(\varphi + \theta) - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cos^2(\varphi + \theta)} \cdot x^2.$$

Fie $y = x\,tg\,\theta$ ecuația dreptei OP.

Pentru a obține "bătaia" OA, intersectăm dreapta OP cu traiectoria lui M, i.e. scriem

$$x\,tg\,\theta = x\,tg(\varphi + \theta) - \frac{g}{2\,v_0^2 \cos(\varphi + \theta)} \cdot x^2 .$$

Rezultă $x = 0$ și $x_A = \dfrac{2\,v_0^2\,\cos^2(\varphi + \theta)}{g}\,(tg(\varphi + \theta) - tg\,\theta)$.

Evident $OA.\cos\theta = x_A$; de aceea

$$OA = \frac{2.v_0^2}{g} \cdot \frac{\cos(\varphi + \theta)\sin\varphi}{\cos^2\theta}.$$

La v_0 = constant, observăm că maximul lui OA corespunde maximului funcției $f(\varphi) = 2\sin\varphi\cos(\varphi + \theta) = \sin(2\varphi + \theta) - \sin\theta$; ori maximul acesteia e atins pentru $2\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$, de pildă, adică pentru

$$\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2}(\widehat{POy}).$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Deci, în cazul acestui maxim, $\vec{v}_0$ e dirijată după bisectoarea $\sphericalangle POy$ și acest maxim este:

$$OA_{max} = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

b) Să calculăm bătăile OA', corespunzătoare unghiului $\alpha' = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} - \alpha$ și OA" pentru $\alpha'' = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} + \alpha$.

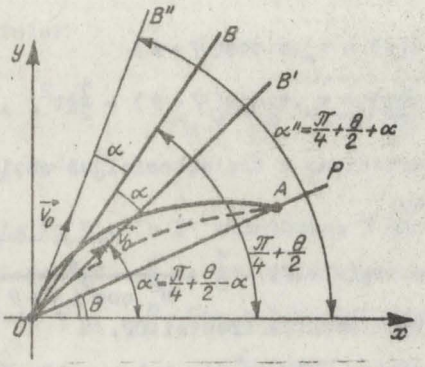


Fig.4.53.

Avem:

$$OA' = \frac{2v_0^2}{g.\cos^2\theta} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} - \alpha\right)$$

; OA' = OA"

$$OA'' = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} + \alpha\right)$$

c) Apoi va trebui să avem $OA_x = OA_p$ (vedeți fig.4.54.)

Dar OA_x se obține pentru $\theta = 0$

$$OA_x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi$$

Egalînd pe acest OA_x cu OA găsit mai sus, rezultă

$$2\cos(\theta + \varphi) \sin\varphi = \cos^2\theta \sin 2\varphi$$

Simplificăm cu $\sin\varphi \neq 0$ și obținem

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

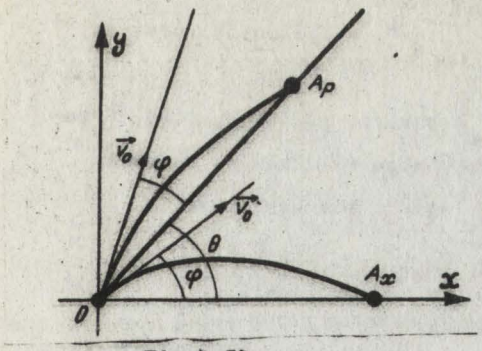


Fig.4.54.

$\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi = \cos^2\theta\cos\varphi$

Izolăm termenul cu $\sin\varphi$

$\cos\theta\cos\varphi(1-\cos\theta) = \sin\theta\sin\varphi$

și ridicăm la pătrat:

$\cos^2\theta\cos^2\varphi(1-\cos\theta)^2 =$

$= (1 - \cos^2\theta)\sin^2\varphi$

Se observă soluția $\cos\theta = 1$ și altele 3 date de ecuația de gradul al III-lea în $\cos\theta$.

$$\cos^2\theta\cos^2\varphi - \cos^3\theta\cos^2\varphi = \sin^2\varphi + \cos\theta\sin^2\varphi \;|:\cos^2\varphi$$

$$\cos^3\theta - \cos^2\theta + tg^2\varphi + \cos\theta \cdot tg^2\varphi = 0$$

Dacă se dă $\cos\theta$, atunci din relația precedentă rezultă $tg^2\varphi$:

$$tg^2\varphi = \frac{\cos^2\theta - \cos^3\theta}{1 + \cos\theta}$$

Să vedem care este unghiul φ cel mai mare posibil, evident mai mic decît $\frac{\pi}{2}$.

Maximul acesta are loc o dată cu maximul tangentei $y = tg^2\varphi$

Fie deci $y(u) = \frac{u^2-u^3}{1+u}$, $-1 < u < 1$.

Facem y' și apoi tabloul de variație ($y' = \frac{-2u(u^2+u-1)}{(1+u)^2}$)

u	-1		0		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		1
y'(u)		-	0	+	0	-	
y(u)		↘	0 m	↗	M	↘	0

Evident $M = y_{max} = y(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}$

Deci $y_{max} = \max tg^2\varphi = 0,09e1679$

Prin urmare $\max tg\varphi = 0,3oo2$.

Deci cea mai mare valoare pentru unghiul de tragere φ este $\varphi_{max} = 16^o43'$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

El corespunde lui $\cos\theta = u = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}6180339$, ceea ce dă $\theta \simeq 51^{\circ}50'$.

d) Dacă vrem să aflăm locul geometric al lui A_p cînd θ variază, dar φ și v_0 rămîn constante, trebuie să eliminăm pe θ între ecuațiile care dau coordonatele lui A_p față de sistemul xOy:

$$\begin{cases} x = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{\cos(\theta+\varphi)\sin\varphi}{\cos^2\theta} \cdot \cos\theta \\ y = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{\cos(\theta+\varphi)\sin\varphi}{\cos^2\theta} \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Același rezultat obținem cînd eliminăm pe θ între

$$x = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \cos(\theta+\varphi) \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} \quad \text{și} \quad y = x \cdot \operatorname{tg}\theta$$

sau între $x = \frac{2v_0^2}{g}\left[\cos\varphi - \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta\right](\sin\varphi)$ și $y = x\operatorname{tg}\theta$; găsim $x = \frac{2v_0^2}{g}\cos\varphi\sin\varphi - \frac{2v_0^2}{g}\sin^2\varphi\frac{y}{x}$; $y = x\cdot\operatorname{cotg}\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2\sin^2\varphi}$

Rezultă imediat că e vorba de traiectoria unui punct material aruncat cu viteza $\vec{v}_0$, care face cu axa Ox unghiul $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

2) Fie $\theta(.): I \longrightarrow \mathbb{R}$, de clasă C^2. Mai întîi calculăm viteza lui P: $v^2 = \dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\theta}^2 = (-a\sin\theta)^2\dot{\theta}^2 + a^2(1+\cos\theta)^2\dot{\theta}^2 = 2a^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta)$.

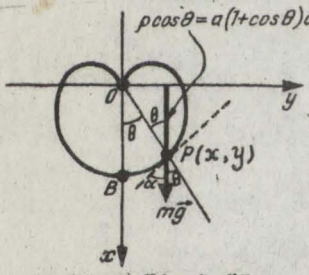


Fig.4.55.

Întrucît $\overset{\frown}{OB} = 2a$, avem $v_B = \sqrt{4ag}$. Punctul P are coordonatele

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\theta = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = \varrho\sin\theta = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

Avînd în vedere că mișcarea lui P se face fără frecare, teorema energiei între punctele B și P ne dă

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = mg\int_{x_B}^{x} dx \quad \text{sau} \quad \frac{v^2}{2} - 2ag = gx - 2ag \quad \text{sau}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$a^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta) = ag(1+\cos\theta)\cos\theta \text{ sau}$$

$$a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta \text{ sau } 2a\dot{\theta}\ddot{\theta} = -g\sin\theta\dot{\theta} \text{ sau}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2a}\cdot\sin\theta = 0. \qquad (1)$$

Dacă avem în vedere ec a pendulului matematic

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \qquad (2)$$

putem afirma că mişcarea lui P pe cardioidă este asemănătoare cu aceea a unui pendul (matematic) cu lungimea $\ell = 2a$.

3)α) Diferenţiem pe x(t) şi y(t) şi avem $dx = a(1+\cos\theta)d\theta$ $dy = a\sin\theta\, d\theta$; apoi calculăm pe ds:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a\cdot\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta;$$

integrăm de la 0 la θ şi găsim

$$\widehat{OM} = s = 4a\sin\frac{\theta}{2}$$

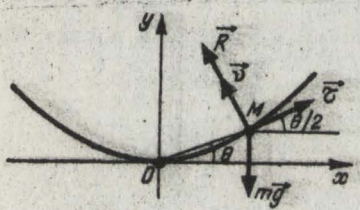


Fig.4.56.

Versorul tangentei $\vec{\tau}$ are proiecţiile

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

β) Ecuaţia de mişcare $m\vec{\gamma} = m\vec{g} + \vec{R}$ o proiectăm pe tangentă

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\frac{\theta}{2}; \text{ sau } \ddot{s} + g\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

sau, pe baza relaţiei $s = 4\cdot a\cdot\sin\frac{\theta}{2}$,

$$\ddot{s} + \frac{g}{4a}\cdot s = 0$$

Integrăm această ecuaţie şi găsim

$$s(t) = C_1\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot t\right) + C_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot t\right)$$

Punem apoi condiţiile iniţiale $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0$.

Ele ne dau: $C_1 = 0$ şi $C_2 = 2\cdot v_0\sqrt{\frac{a}{g}}$

Astfel s(t) se scrie

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$s(t) = 2v_0\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{a}}\, t\right), \quad t \geq 0 .$$

Acum $v(t) = \dot{s}(t)$, adică

$$v(t) = v_0 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{a}}\, .t\right), \quad t \geq 0 .$$

γ) Particula se opreşte cînd $v = 0$, adică la momentul t^M dedus din ecuaţia

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{a}} \cdot t^M = \frac{\pi}{2} \text{ ; deci la } \quad t^M = \pi\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}$$

δ) Particula execută deci o mişcare oscilatorie cu perioada definită de

$$\omega T = 2\pi \text{ ; } T = \frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{a}}} = 4\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}$$

Deci $t^M = \frac{T}{4}$. Este interesant de constatat că T nu depinde de v_0.

ε) Să aflăm timpul t_1 pus de particulă pentru a ajunge din $M(x_0, y_0)$ în O: folosim relaţia $dt = \frac{ds}{v}$; avem

$$t_1 = \left| \int_S^O \frac{ds}{v} \right| = \left| \int_{y_0}^O \frac{\sqrt{1+x'^2}\, dy}{v} \right| \quad , \text{ cu } v = \sqrt{2g(y_0 - y)} ;$$

dar

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{2(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{2}{1-\cos\theta} = \frac{2a}{y}$$

sau

$$\sqrt{1+x'^2} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{y}} .$$

Deci

$$t_1 = \left| \int_{y_0}^O \frac{\sqrt{2a}.dy}{\sqrt{y}\sqrt{2g(y_0 - y)}} \right| = \left| \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{y_0}^O \frac{dy}{\sqrt{\frac{y_0^2}{4} - (y - \frac{y_0}{2})^2}} \right| =$$

$$= \left| \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \arcsin \frac{y - \frac{y_0}{2}}{\frac{y_0}{2}} \right|_{y=y_0}^{O} = \sqrt{\frac{a}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} .$$

Observăm că t_1 este independent de y_0; o curbă cu această proprietate se numeşte curbă tautocronă.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

4) Vom folosi proiecţiile ecuaţiei vectoriale $m\bar{a} = \bar{F}$ pe axele naturale de versori $\bar{\tau}$ şi $\bar{\nu}$.

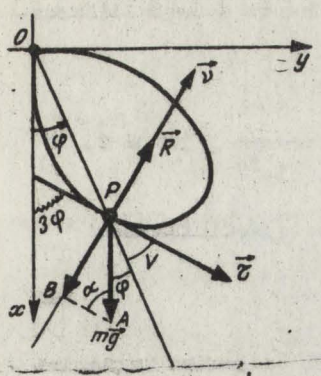


Fig.4.57.

Mai precis, cerîndu-ni-se numai $\bar{R}$, vom folosi proiecţia ecuaţiei menţionate numai pe axa $P\nu$; această ecuaţie se scrie

$$\frac{mv^2}{\rho_c} = R - mg\sin\alpha. \qquad (1)$$

Raza de curbură e calculăm cu formula bine cunoscută,

$$\rho_c = \frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2 - rr''} = \frac{2a}{3\sqrt{2}\sin 2\varphi}$$

iar unghiul V, dintre $\overline{OP}$ şi $\bar{\tau}$ se determină cu relaţia

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'} = \operatorname{tg} 2\varphi, \text{ deci } V = 2\varphi$$

Acum $\sphericalangle APB = 2\varphi + \varphi = 3\varphi = \sphericalangle PAB = \alpha$

Inlocuind pe α cu 3φ în (1), găsim

$$\frac{mv^2}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}\sin 2\varphi}{2a} = R - mg\sin 3\varphi \qquad (2)$$

Pentru a afla pe v, folosim <u>teorema energiei</u> între O şi P:

$$\frac{mv^2}{2} = mgx; \quad \frac{mv^2}{2} = mg.r\cos\varphi; \quad \frac{mv^2}{2} = mg\,a\sqrt{2\sin 2\varphi}.\cos\varphi \qquad (3)$$

Folosind v^2 dat de (3), relaţia (2) ne dă pe R sub forma

$$R = mg(\sin 3\varphi + 6\sin 2\varphi\cos\varphi). \qquad (4)$$

Deci relaţia (4) ne dă expresia lui R în funcţie de φ.

Pentru a exprima pe R în funcţie de t, trebuie să găsim relaţia dintre φ şi t.

Astfel din relaţia (3), cu $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$, deducem

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \sqrt{8a^2g^2\cos^2\varphi\sin 2\varphi}. \qquad (5)$$

In (5) înlocuim pe $\dot{r}^2$ calculat din ecuaţia lemniscatei:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}, \quad \dot{r}^2 = \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{2a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

Rezultă după mai multe calcule, următoarea ecuaţie diferenţială cu variabilele separate:

$$dt = 2\sqrt{\frac{r}{a}} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt[4]{\frac{\cos^5\varphi}{\cos^8\varphi} \cdot \sin^3\varphi}}; \varphi(0) \neq 0.$$

Soluţia implicită a acestei ecuaţii este definită de

$$tg\,\varphi = \frac{t^4 a^2}{64\, g^2} \qquad (6)$$

Acum urmează să exprimăm pe R din (4) cu ajutorul tangentei unghiului φ din (6) şi problema e rezolvată.

134. 1) Legea conservării impulsului ne dă:

$$m\vec{v}_0 = M\vec{V} + m\vec{v} \qquad (1)$$

unde:

$\vec{v}_0$ este viteza glontelui înainte de ciocnire;

$\vec{V}$ " viteza bilei imediat după ciocnire;

$\vec{v}$ " viteza glontelui imediat după ciocnire.

Relaţia (1) proiectată pe o axă orizontală ne dă

$$mv_0 = MV + mv \qquad (2)$$

Legea de mişcare a bilei este $X = Vt$, $Y = \frac{1}{2} \cdot gt^2$

In A avem $X = S$, deci $S = V\,\theta$, $h = \frac{1}{2} \cdot g\,\theta^2$; de aici

$\theta = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1s$ şi $V = S\sqrt{\frac{g}{2h}} = 2o$ m/s.

Legea de mişcare a glontelui după străpungerea bilei este

$$x = vt, \; y = \frac{1}{2} \cdot gt^2$$

In B avem: $s = vt_1$; $h = \frac{1}{2}gt_1^2$; $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1s$.

Apoi din (2) găsim $v = \frac{1o^{-2} \cdot 5oo - o,2.2o}{1o^{-2}} = 1oo$ m/s.

Acum $s = vt_1 = 1oo \cdot 1 = 1oo$ m.

Partea de energie transformată în căldură în procesul de străpungere a bilei de către glonte este:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$Q = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} MV^2 - \frac{1}{2} mv^2 \simeq 115e$ J, față de $E_{c0} = \frac{1}{2} mv_0^2 = 125e$ J.

2) Fie v' viteza ansamblului după ce glonțele a lovit corpul și a rămas în el. Legea (conservării) impulsului ne permite să scriem:

$$mv = (m+M)v'$$

De aici găsim $v' = \frac{mv}{m+M}$. Apoi teorema energiei se scrie

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 = (m+M)gh$$

și ne dă pe h:

$$h = \frac{v'^2}{2g} = \frac{m^2v^2}{2g(M+m)^2}$$

3) Notăm cu M_p masa platformei cu M_t masa tunului, cu M_o masa obuzului, cu v_p viteza platformei înainte de tragere, cu v_o viteza obuzului la ieșirea din țeavă tunului și cu v'_p viteza vagonului - platformă după tragere.

Sistemul nostru de corpuri poate fi considerat ca un sistem închis și atunci pentru el are loc teorema de conservare a impulsului:

$$(M_p + M_t + M_o)\vec{v}_p + M_o\vec{v}_o + (M_p + M_t)\vec{v}'_p = \vec{0}$$

sau în proiecție pe direcția de mișcare a vagonului platformă:

$$(M_p + M_t + M_o)v_p = M_o v_o + (M_p + M_t)v'_p$$

Cu ajutorul acestei relații putem da răspunsul la întrebările puse:

a) $v_p = 0$; $v_o = 5oo$ m/s $\longrightarrow v'_p = -\frac{M_o v_o}{M_p + M_t} = -12$ km/h.

b) $v_p = 5$ m/s, $v_o = 5oo$ m/s $\longrightarrow v_p = -7,12$ km/h.

c) $v_p = 5$ m/s, $v_o = -5oo$ m/s $\longrightarrow v'_p = 3o$ km/h.

Semnul - de la punctul 1) ne arată că mișcarea vagonului platformă se face în sens contrar mișcării obuzului.

135. 1) Pe dreapta înclinată CB avem $a = g.\sin\alpha$ și legea spațiului este $CM = \frac{1}{2}.g.\sin\alpha.t^2$ (1); fie θ timpul în care M ajunge

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

din C în B. Avînd în vedere că BC = AB $\sin\alpha$ = 2.R.$\sin\alpha$, din formula (1) deducem

$$2R\sin\alpha = \frac{1}{2}\tau^2 \cdot g \cdot \sin\alpha \text{ sau } \tau = 2\sqrt{\frac{R}{g}},$$

relaţie care exprimă independenţa lui τ de α.

2) La urcare: $\begin{cases} x = v_0 t - \frac{at^2}{2} \\ v = v_0 - at; \end{cases}$ $\begin{cases} d = v_0\tau - \frac{a\tau^2}{2} \\ 0 = v_0 - a\tau \\ a = g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha \end{cases}$

La coborîre: $y = a' \cdot \frac{t^2}{2}$; $\begin{cases} d = a' \cdot \frac{\tau'^2}{2}; \ \tau' = n\tau \\ a' = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \end{cases}$

Din aceste relaţii deducem $a = a'n^2$ şi deci $\mu = \frac{n^2-1}{n^2+1}\operatorname{tg}\alpha$.

3) Acceleraţia punctului P în lungul dreptei MF este $a = g\sin\alpha$. De aceea $MF = \frac{1}{2}g \cdot \sin\alpha \cdot t^2$. Avem apoi

$$MF^2 = y^2 + (x - p/2)^2 = 2px + x^2 - px + \frac{p^2}{4} =$$

$$= (x + \tfrac{p}{2})^2; \text{ deci } MF = x + \tfrac{p}{2} \text{ şi } FM' = MF \cdot \cos\alpha.$$

Din relaţiile care dau pe MF împreună cu $x = OF + FM' = \frac{p}{2} + FM\cos\alpha$, deducem

$$\frac{1}{2}g\sin\alpha \cdot t^2 = p + (\tfrac{1}{2}g\sin\alpha \cdot t^2)\cos\alpha$$

respectiv

$$t^2 = \frac{2p}{g} \cdot \frac{}{\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

Evident t^2 şi deci t va fi minim atunci cînd $f(\alpha) = \sin\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha$ va fi maxim, unde $f:(0,\pi) \longrightarrow R$. Avem succesiv

$$f'(\alpha) = \cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -2\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1$$

$$f'(\alpha) = 0 \leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3};$$

$$f''(\alpha) = 4\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha; \ f''(\tfrac{2\pi}{3}) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(-\tfrac{1}{2}) - \frac{3}{2} < 0.$$

Prin urmare $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ e un punct de maxim pentru f şi deci un punct de minim pentru t^2, i.e. pentru t.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Deci α cerut este egal cu 12^0.

4) a) La urcare pe planul înclinat avem

$$a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

De aceea $v_0^2 = 2al$; $l = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 1{,}21$ m.

b) Din $\frac{v_0^2}{2g} = l \cdot (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ cu $x = l \cdot \cos\alpha$, $y = l \cdot \sin\alpha$ deducem (vedeți figura 4.58.):

$$\frac{v_0^2}{2g} = \mu x + y$$

sau

$$\frac{x}{\frac{v_0^2}{2\mu g}} + \frac{y}{\frac{v_0^2}{2g}} - 1 = 0$$

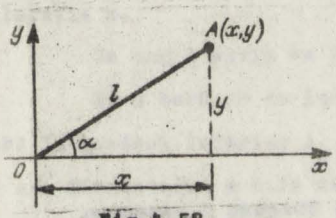


Fig.4.58.

Deci "suportul" locului geometric e o dreaptă care taie pe Oy segmentul $\frac{v_0^2}{2g}$, iar pe Ox segmentul $\frac{v_0^2}{2\mu g}$.

5) Se știe că pe planul înclinat, la coborâre, avem

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Deci viteza la baza planului este $v^2 = 2al$ unde l este lungimea planului.

Pe planul orizontal $a' = \mu g$ și vom avea $v^2 = 2a'l$. De aici reiese că $a = a'$ sau $\sin\alpha - \mu\cos\alpha = \mu$, de unde $\mu = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

6) Alegem axele ortogonale Ax și Ay.

Se știe că

$$\begin{cases} x_p = v_\alpha \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y_p = -\frac{1}{2}gt^2 + v_\alpha \sin\alpha \cdot t \\ v_{px} = v_\alpha \cos\alpha \\ v_{py} = -gt + v_\alpha \sin\alpha \end{cases}$$

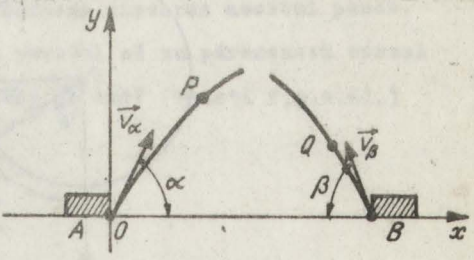


Fig.4.59.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Avînd în vedere că proiectilul din B e lansat după scurgerea a t_0 secunde și că $AB = \ell$, coordonatele lui Q vor fi:

$$x_Q = \ell - v_\beta \cos\beta(t-t_0)$$

$$y_Q = -\frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + v_\beta \sin\beta(t-t_0)$$

In momentul interceptării lui P de către Q vom avea

$$\begin{cases} -v_\beta \cos\beta(t-t_0) + \ell = v_\alpha \cos\alpha\, t \\ -\frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + v_\beta \sin\beta(t-t_0) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_\alpha \sin\alpha \cdot t. \end{cases}$$

Din fiecare ecuație deducem pe t și egalăm valorile lui. Găsim

$$\frac{v_\beta \cos\beta\, t_0 + \ell}{-v_\beta \sin\beta\, t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2} = \frac{(v_\alpha \cos\alpha + v_\beta \cos\beta)t_0}{(v_\alpha \sin\alpha - v_\beta \sin\beta)t_0} = \frac{\ell - v_\alpha \cos\alpha \cdot t_0}{\frac{1}{2}gt_0^2 - v_\alpha \sin\alpha \cdot t_0} = k$$

(am folosit proprietatea $\frac{x}{y} = \frac{u}{v} = \frac{x-u}{y-v}$).

Astfel se găsește ecuația

$$\cos\beta + k\sin\beta = \frac{-\ell - \frac{k}{2}gt_0^2}{v_\beta t_0},$$

care rezolvată în raport cu β ne dă unghiul de tragere β necesar.

§ 4.5. Pendulul matematic

4.5.1. Rezumat teoretic

1. Ecuația de mișcare a pendulului matematic

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0, \quad \theta : I \longrightarrow \mathbb{R}, \ \theta \in C^2(I).$$

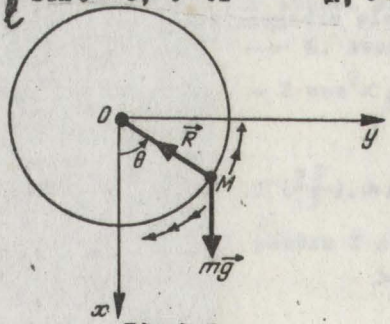


Fig.4.6e.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2. Ecuaţia de mişcare a pendulului matematic atunci cînd $\sin\theta \simeq \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0,\ \theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi);\ \omega^2 = \frac{g}{\ell};\ T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

4.5.2. **Probleme**

136. 1) Un pendul matematic este realizat cu ajutorul unui punct material M legat la un capăt al unui fir flexibil şi inextensibil, care e fixat la celălalt capăt într-un punct O în jurul căruia poate oscila sub influenţa forţei de gravitaţie cînd e deplasat din poziţia de echilibru. La momentul iniţial dreapta OM face cu verticala un unghi de 9^0 şi din această poziţie punctul M este lăsat să oscileze.

In momentul în care pendulul ajunge în punctul cel mai de jos, punctul său de suspensie O începe să se mişte vertical în sus cu acceleraţia a.

Ce unghi maxim va face pendulul cu verticala?

2) O bară AB de lungime ℓ şi cu masa neglijabilă este articulată la capătul inferior A, iar la cel superior B şi la mijlocul ei C are fixate cîte o bilă de masă m. Bara se aşează în poziţie verticală şi este lăsată liber. Din cauza unui mic dezechilibru, ea se roteşte într-un plan vertical. Să se calculeze viteza capătului superior B şi a mijlocului barei C, după o rotaţie de 9^0, adică în poziţia orizontală a barei.

3) Un punct material M de masă m este lansat cu viteza verticală $\vec{v}_0$, pe faţa interioară a unui cerc luciu de rază R, aşezat într-un plan vertical, din punctul A. Să se studieze mişcarea acestui punct. Care este viteza v_0 minimă, pentru ca punctul să nu părăsească cercul înainte de a ajunge în punctul B cel mai de sus? (vedeţi fig.4.61.)

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

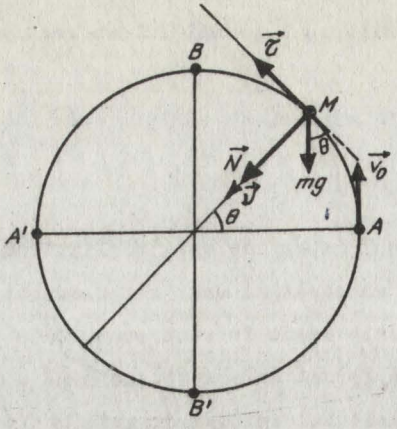


Fig.4.61.

137. 1) Un punct greu P care se mişcă pe partea interioară a unui cerc vertical de rază a este lansat din punctul cel mai de jos B' al cercului cu viteza iniţială v_0 (orizontală). Să se cerceteze dacă el poate părăsi cercul şi anume în ce punct.

După ce a părăsit cercul punctul descrie o parabolă.

Se poate alege v_0 astfel încît parabola să treacă prin centrul cercului?

2) O particulă grea este fixată la capătul B al unui tije AB, fără greutate, de lungime a. Tija este articulată în A şi se poate roti fără frecare în jurul lui A într-un plan vertical. Bara este pusă în mişcare din poziţia verticală, cînd particula grea este situată deasupra articulaţiei A, fără viteză iniţială, printr-o mică perturbare.

Să se arate că timpul pus de particulă - bară să treacă din poziţia orizontală în poziţia cea mai jos posibilă este

$\sqrt{\frac{a}{g}}\ \ln(1+\sqrt{2})$ secunde.

3) Printr-un tub circular de rază r alunecă fără frecare un punct material M de masă m. Să se studieze mişcarea sa şi să se determine viteza punctului în cazul în care:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

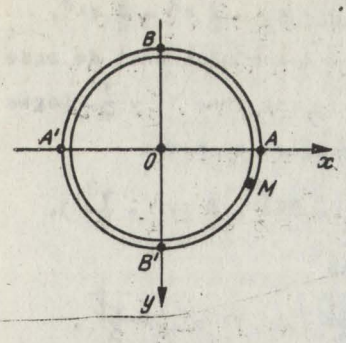


Fig.4.62.

α) Punctul M e atras de axa Oy cu forţa $F = k^2mx$ şi apoi în cazul în care

β) Punctul M e atras de B' cu forţa $F' = k^2m \cdot MB'$, (vedeţi figura 4.62.).

138. Un punct material greu P, de masă m, se mişcă fără frecare pe un cerc de rază ℓ, situat într-un plan vertical xOy, centrul cercului fiind în O şi verticala descendentă servind de axă Ox.

Punctul material greu P este atras de punctul cel mai de sus al cercului A, cu o forţă proporţională cu distanţa PA, aceasta forţă de atracţie fiind egală cu jumătatea greutăţii, cînd P se găseşte în punctul cel mai de jos al cercului, anume în B.

Să se determine ecuaţia de mişcare a punctului P.

Să se calculeze reacţiunea R a cercului asupra punctului.

4.5.3. Rezolvarea preblemelor

136. 1) Viteza cu care ajunge în poziţia cea mai de jos se deduce din $\frac{mv^2}{2} = mgl$, adică $v = \sqrt{2gl}$.

Înălţimea h cu care urcă pendulul din poziţia cea mai de jos se deduce din

$$m(a+g)h = \frac{mv^2}{2}, \text{ cu } h = \ell(1-\cos\alpha).$$

Rezultă $\cos\alpha = \frac{a}{a+g}$

2) La un moment t oarecare bara ocupă poziţia AB', în care B are viteza $\vec{v}$, iar C are viteza $\vec{v}'$. Energia cinetică a bilelor provine din energia lor potenţială iniţială:

$$E_p = mgl + mg\frac{\ell}{2} = \frac{3mg\ell}{2},$$

unde $AB = \ell$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

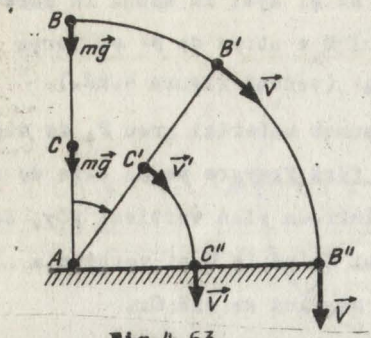


Fig.4.63.

In poziţia orizontală AB" bilele au energia cinetică $E_c = \frac{m}{2} V^2 + \frac{m}{2} V'^2$.

Cum C şi B descriu cercuri de raze $AC = \frac{\ell}{2}$ şi $AB = \ell$, vom avea $V' = \frac{V}{2}$. Legea conservării energiei se scrie

$$E_c = E_p \quad \text{sau} \quad \frac{3\,mg\ell}{2} = \frac{m}{2}\left(V^2 + \frac{V^2}{4}\right).$$

De aici rezultă

$$V = 2\sqrt{\frac{3g\ell}{5}} \quad \text{şi} \quad V' = \sqrt{\frac{3g\ell}{5}}.$$

3) Proiectăm ecuaţia diferenţială de mişcare a punctului M pe tangenta Mt şi pe normala MY, observînd că $\widehat{AM} = R\theta$ şi că $v = R\dot{\theta}$. Găsim

$$mR\ddot{\theta} = -mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$\frac{mR^2\dot{\theta}^2}{R} = N + mg\sin\theta, \qquad (2)$$

unde N este reacţiunea cercului asupra punctului M.

Din ecuaţia (1), $R\ddot{\theta} = -g\cos\theta$, prin înmulţire cu $2\dot{\theta}$ şi integrare deducem:

$$R\dot{\theta}^2 = -2g\cdot\sin\theta + C. \qquad (3)$$

Dar la $t = 0$, $R\dot{\theta} = v = v_0$ şi $\theta = 0$.

Deci $C = \frac{v_0^2}{R}$ şi (3) devine:

$$R\dot{\theta}^2 = -2\cdot g\cdot\sin\theta + \frac{v_0^2}{R}.$$

Din ecuaţia a doua, (2), rezultă

$$N = m\frac{v_0^2}{R} - 2\cdot mg\cdot\sin\theta - mg\cdot\sin\theta \text{ sau}$$

$$N = \frac{mv_0^2}{R} - 3mg\cdot\sin\theta.$$

Pentru ca mobilul să nu părăsească cercul trebuie ca să avem $N > 0$, adică $v_0^2 > 3\cdot gR\sin\theta$.

Dacă $\theta = \frac{\pi}{2}$, atunci $v_0^2 > 3\cdot Rg$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

137. 1) Ecuația lui Newton, $m\vec{\Gamma} = m\vec{g} + \vec{R}$, în proiecții pe $\vec{\tau}$ și $\vec{\gamma}$ ne dă:

$$\begin{cases} ma_\tau = -mg \sin\theta, & \theta : I \to \mathbb{R}, \ \theta \text{ de clasă } C^2 \\ ma_\gamma = R - mg\cos\theta \text{ sau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{v} = -g\sin\theta & (1) \\ m\frac{v^2}{a} = R - mg\cos\theta. & (2) \end{cases}$$

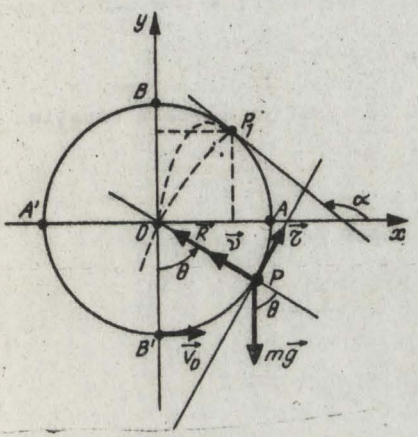


Fig.4.64.

Dar $\widehat{B'P} = s = a\theta$; $v = \dot{\theta}\, a$; deci $a_\tau = \dot{v} = a\ddot{\theta}$

Acum ecuația (1) se mai scrie: $a\ddot{\theta} = -g\sin\theta$. O înmulțim cu $2\dot{\theta}$ și integrăm și găsim $a\dot{\theta}^2 = 2g\cos\theta + K_1$ sau $(a\dot{\theta})^2 = 2ga\cos\theta + C_1$ sau $v^2 = 2ga\cos\theta + C_1$. Dar la $\theta = 0$ avem $v = v_0$.

Deci $C_1 = v_0^2 - 2ag$ și v^2 e definit de ecuația

$$v^2 - v_0^2 = -2ag(1-\cos\theta). \qquad (3)$$

Rezultă imediat expresia lui R dat de (2)

$$R = \frac{m}{a}(v_0^2 - 2ag + 3ag\cos\theta)$$

Punctul greu P va părăsi cercul atunci cînd $R = 0$, adică atunci cînd $\cos\theta_1 = \dfrac{2ag - v_0^2}{3ag}$; condiția $-1 \le \cos\theta_1 \le 1$ ne dă $v_0^2 < 5ag$.

Punctul P_1 în care are loc părăsirea cercului are coordonatele carteziene x_1 și y_1 și cele polare a și $\theta_1 \in (0, \pi)$.

Vom avea $x_1 = a\sin\theta_1$, $y_1 = -a\cos\theta_1$.

În P_1 viteza lui P va fi dată de (3); dacă considerăm și $R = 0$, vom putea scrie:

$$v_1^2 = v_0^2 - 2ag + 2ag\cos\theta_1 = -ag\cos\theta_1.$$

Cda.236/987 fasc. 18

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Tangenta la cerc în P_1 face cu Ox unghiul $\alpha = \theta_1$

Începînd din momentul în care P a ajuns în P_1, legile de mişcare ale lui P vor fi

$$P \quad \begin{cases} x = x_1 + (v_1 \cos\theta_1)t \\ y = y_1 + (v_1 \sin\theta_1)t - \frac{1}{2} \cdot gt^2 \end{cases}$$

Eliminînd pe t, găsim parabola de ecuaţie:

$$y = y_1 + (x-x_1)\operatorname{tg}\theta_1 - \frac{1}{2} g \frac{(x-x_1)^2}{v_1^2 \cos^2\theta_1} .$$

Dacă cerem ca x = 0 şi y = 0 să verifice această ecuaţie găsim:

$$y_1 - x_1 \operatorname{tg}\theta_1 - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x_1^2}{v_1^2 \cos^2\theta_1} = 0 \quad \text{sau} \quad \operatorname{tg}^2\theta_1 = 2.$$

Rezultă $\operatorname{tg}\theta_1 = -\sqrt{2}$ şi $\cos\theta_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Din $\cos\theta_1 = \frac{2ag - v_0^2}{3ag}$, cu $\cos\theta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

găsim pe $v_0^2 = ag(2+\sqrt{3}) < 5ag$.

2) Fie m masa particulei grele şi θ unghiul care fixează la momentul t poziţia lui AB, $\theta : I \to \mathbb{R}$, de clasă C^2. Greutatea mg din B' o descompunem în componenta $-mg.\cos\theta$, care întinde sau comprimă tija AB şi componenta meteare $mg.\sin\theta$. Vom folosi teorema energiei:

$d(\frac{mv^2}{2}) = \vec{F}d\vec{r}$ între punctele B şi B', care ne dă

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg.BB''.$$

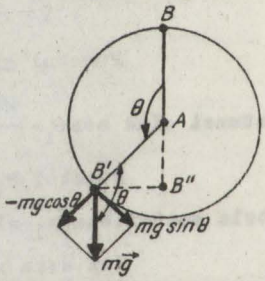


Fig.4.65.

Dar $v_0 = v_B = 0$, iar

$BB'' = BA + AB'' = a - a\cos\theta$.

Deci $v^2 = 2ag(1-\cos\theta)$, unde $v = a\dot{\theta}$. Prin urmare obţinem ecuaţia diferenţială $\dot{\theta}^2 = 4\frac{g}{a}\sin^2\frac{\theta}{2}$ care ne dă $dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

sau

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$t=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{d\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}},\quad t=\sqrt{\frac{a}{g}}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\sqrt{\frac{a}{g}}\ln(\sqrt{2}+1)\ \text{secunde}.$$

3) $\mathcal{L}$) Conform figurii alăturate avem

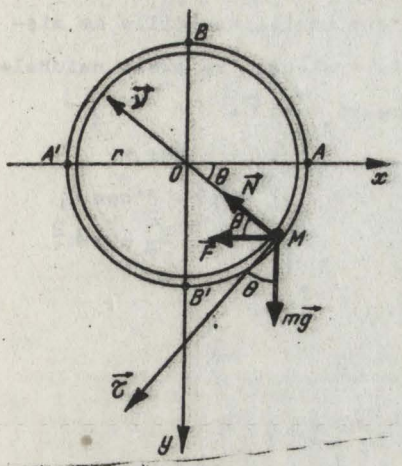


Fig.4.66.

$$\widehat{AM}=s=R\theta\ ;\ v=r\dot{\theta}\ .$$

Scriem ecuaţiile de mişcare în proiecţii pe axele naturale; avem

$$ma_\xi=F_\xi\ ;\ ma_\eta=F_\eta\ ,$$

unde F_ξ şi F_η sînt proiecţiile rezultantei forţelor aplicate punctului M, care este $m\vec{g}+\vec{F}+\vec{N}$; deci

$$\begin{cases} m\ddot{\theta}r=mg\cdot\cos\theta+F\cdot\sin\theta \\ \dfrac{m(r\dot{\theta})^2}{r}=-mg\sin\theta+N+F\cdot\cos\theta \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} r\ddot{\theta}=g\cos\theta+k^2r\cos\theta\sin\theta & (1) \\ N=mr\dot{\theta}^2+mg\sin\theta-F\cos\theta. & (2) \end{cases}$$

Dacă în (1) înmulţim cu $2\dot{\theta}$ şi integrăm, găsim

$$r\dot{\theta}^2=2\cdot g\cdot\sin\theta+k^2r\sin^2\theta+C_1 \qquad (3)$$

din care, printr-o nouă cuadratură, deducem

$$\theta=f(t,C_1,C_2).$$

Ţinînd cont de (3), ecuaţia (2) ne dă reacţiunea N:

$$N=3mg\sin\theta-k^2mr\cos 2\theta+mC_1$$

β) Să calculăm acum unghiurile pe care le face forţa $\vec{F}$ cu $\vec{\xi}$ şi $\vec{\tau}$; avem

$$\sphericalangle MOB'=\frac{\pi}{2}-\theta\ ;\ \text{în}\ \triangle MB'O\ \text{avem}$$

$$\alpha+\alpha+\frac{\pi}{2}-\theta=\pi\ ;$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

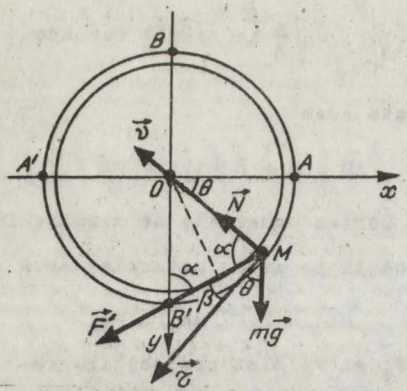


Fig.4.67.

deci $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$; mai departe avem

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$; apoi

$MB' = 2r\cos\alpha = 2r\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})$.

Acum scriem ecuaţiile de mişcare în proiecţii pe axele naturale de versori $\vec{\tau}$ şi $\vec{\nu}$:

$$ma_\tau = mg\cos\theta + F'\cos\beta$$
$$ma_\nu = N - mg\sin\theta + F'\cos\alpha;$$
$$a_\tau = \dot{v} = r\ddot{\theta},\quad a_\nu = \frac{v^2}{r} = r\dot{\theta}^2.$$

Avem mai departe:

$$\begin{cases} mr\ddot{\theta} = mg\cos\theta + mk^2 2r\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \\ mr\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta + N + mk^2 \cdot 2r\cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} r\ddot{\theta} = g\cos\theta + k^2 r\cos\theta & (1) \\ N = mr\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta - mk^2 r(1-\sin\theta). & (2) \end{cases}$$

Din (1), prin înmulţire cu $2\dot{\theta} \neq 0$ şi integrare, găsim

$$r\dot{\theta}^2 = 2(g + k^2 r)\sin\dot{\theta} + A_1, \qquad (3)$$

care ne dă în final pe $\theta = f(t, A_1, A_2)$,

iar apoi folosind (3) în (2) deducem pe N:

$$N = 3(mg + mk^2 r)\sin\theta + A_1 m - mk^2 r. \qquad (4)$$

138. Introducem forţele $\vec{F}$, $\vec{R}$ şi $m\vec{g}$ care acţionează asupra punctului P.

Avem succesiv:

1) $PA = 2\ell\cos\frac{\theta}{2}$

2) Proiectăm ecuaţia de mişcare $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}$ pe tangenta în P la cerc şi găsim

$$\frac{mdv}{dt} = -mg\sin\theta + F\sin\frac{\theta}{2} \qquad (1)$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

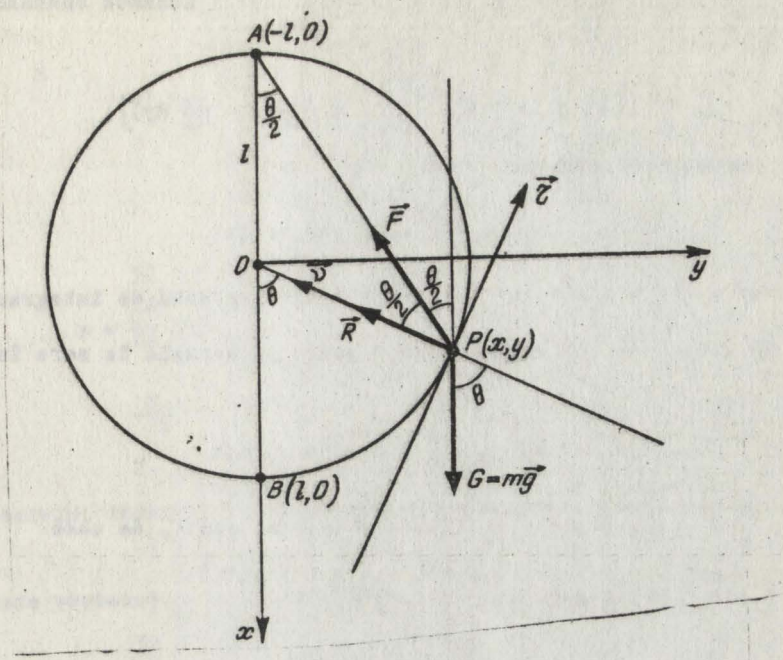


Fig.4.68.

3) Calculăm pe F:

$$F = K.PA = K.2.\ell.\cos\frac{\theta}{2}$$

La $\theta = 0$ avem $F = \frac{mg}{2}$. Deci

$$K = \frac{mg}{4\ell} \text{ și } F = \frac{mg}{4\ell} \cdot 2\ell\cos\frac{\theta}{2}$$

4) Acum ecuația (1) se mai scrie

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin + \frac{mg}{4\ell} \cdot 2.\ell.\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \quad \text{sau}$$

$$\ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta + \frac{g}{4} \cdot \sin\theta \text{ sau}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{4} \cdot \frac{g}{\ell} \cdot \sin\theta = 0.$$

Ecuația verificată de θ ne arată că e vorba de o mișcare pendulară pe care o execută P, sincronă cu un pendul matematic de lungime $\ell' = 4 \cdot \ell/3$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

5) Teorema energiei ne dă pe v^2; în adevăr această teoremă ne permite să scriem

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dL, \quad \text{unde} \quad dL = \bar{F}d\bar{r} = mg\left[\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{4\ell}\right)dx - \frac{x}{4\ell}\,dy\right];$$

de aici prin integrare deducem:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{4}\,mgx - \frac{mgx^2}{8\ell} + C, \text{ respectiv}$$

$$v^2 = \frac{3}{2}\,g\,x - \frac{gx^2}{4\ell} + h, \; h \text{ fiind o nouă constantă de integrare.}$$

6) Acum, proiectînd legea de mişcare pe normala la sere în P, găsim:

$$\frac{mv^2}{\rho} = R + F\cos\frac{\theta}{2} - mg\cos\theta \quad \text{sau}$$

$$\frac{mv^2}{\ell} = R + \frac{mg}{4\ell}\cdot 2\ell\cos^2\frac{\theta}{2} - mg\cos\theta, \text{ de unde}$$

$$R = \frac{9}{4}\,mg\cdot\cos\theta - \frac{mg}{2} + \frac{m}{\ell}\,h.$$

§ 4.6. Mişcarea unui punct material de masă m sub acţiunea unei forţe de atracţie universală $\bar{F} = -f\frac{mM}{r^2}\cdot\bar{\rho}$,

$f = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ (S.I.), $\bar{\rho} = \frac{\bar{r}}{r}$.

4.6.1. Rezumat teoretic

1. Proprietăţi. 1) Raza vectoare $r = r(\theta)$, $r: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \in C^2$, verifică ecuaţia

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{fM}{C^2}$$

dedusă din ecuaţia lui Binet pentru $F = -f\frac{mM}{r^2}$. In această ecuaţie C este constanta ariilor.

2) Condiţiile Cauchy sau condiţiile iniţiale asociate e.d. precedente sînt:

la $t = 0$ se dau r_0, $\theta_0(=0)$, $\dot{r}_0 = v_0\cos\alpha = v_{\rho 0}$, $r_0\dot{\theta}_0 = v_0\sin\alpha = v_{\varepsilon 0}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3) Soluţia problemei Cauchy este

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_1)}.$$

4) Pentru $r_0 v_0^2 < 2.fM$ traiectoria e o elipsă.

" $r_0 v_0^2 = 2 \cdot fM$ " e o parabolă.

" $r_0 v_0^2 > 2 \cdot fM$ " e o hiperbolă.

5) Alte relaţii importante:

$$p = \frac{C^2}{fM}\ ;\ r_{max} = \frac{p}{1-e}\ ,\ r_{min} = \frac{p}{1+e};\ 2a = r_{min} + r_{max}.$$

$$\frac{\mathcal{F}ab}{T} = \frac{1}{2} C = \Omega\ ;\ b = a\sqrt{1-e^2};\ C = r_0 v_0 \sin\alpha .$$

2. Legile lui Kepler: 1) Planetele în mişcarea lor în jurul Soarelui descriu elipse, Soarele ocupînd unul din focare.

2) Mişcarea se face conform teoremei ariilor ($r^2\dot{\theta} = C$), adică raza vectoare a planetei descrie arii egale în timpuri egale.

3) $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\mathcal{F}^2}{fM}$, adică raportul dintre pătratul perioadei de revoluţie şi cubul semiaxei mari a elipsei este acelaşi pentru toate planetele.

4.6.2. Probleme.

139. 1) Două vapoare cu tonajele de 1e6 tone se găsesc la distanţa r = 1e6 m. Cu ce forţă se atrag ele?

2) Calculaţi viteza liniară a Pămîntului în mişcarea sa în jurul Soarelui, admiţînd că masa Soarelui $M_\odot = 2.1e^{30}$ kg şi că Pămîntul descrie o traiectorie circulară cu raza R = $1{,}5.1e^{8}$ km.

3) Două corpuri de mase m şi M se află în repaus la distanţa r_1, unul de celălalt. Sub acţiunea forţei de atracţie universale care se exercită între ele, corpurile se apropie la distanţa r_2, fiecare corp "căzînd" în cîmpul de gravitaţie al celuilalt.

Ce viteză au corpurile cînd distanţa dintre ele devine r_2?

Aplicaţie numerică:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

m = 1ooo kg, M = 9ooo kg; r_1 = 1ooo m, r_2 = 75o m.

4) Ce lucru mecanic e necesar pentru a transporta un corp cu masa m de pe suprafaţa Pămîntului pînă într-un punct aflat la distanţa r de centrul Pămîntului?

Cu ce viteză ajunge acest corp pe suprafaţa Pămîntului, după ce în acel punct, corpul e lăsat liber?

Analizaţi situaţia şi în cazul în care $r \to +\infty$.

14o. 1) Calculaţi intensitatea cîmpului gravific, adică forţa exercitată asupra unităţii de masă în interiorul unui corp sferic de rază a, omogen (a cărui densitate ρ este constantă). Calculaţi intensitatea cîmpului gravific şi în afara corpului sferic.

2) Să ne imaginăm un tunel care străbate Pămîntul prin centrul său O de la Polul Nord la Polul Sud.

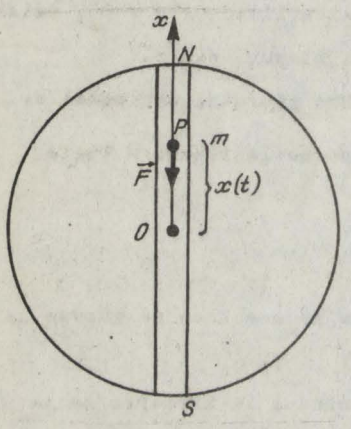


Fig.4.69.

Să presupunem că un punct material P de masă m e lăsat "să cadă" de la Polul Nord prin acest tunel fără viteză iniţială. Calculaţi timpul necesar pentru ca P să ajungă în centrul Pămîntului O şi viteza cu care ajunge în acest punct. Raza Pămîntului se va lua R_0 = 637o km şi acceleraţia gravitaţională la suprafaţa Pămîntului g_0 = 1o m/s.^{2}

3) Un corp sferic din metal, de rază R, conţine o cavitate sferică, a cărei suprafaţă este tangentă la cea a corpului sferic şi care trece prin centrul corpului sferic. Corpul sferic plin, fără cavitate, are masa M.

Cu ce forţă de atracţie universală va atrage corpul acesta o bilă, de masă m, care se găseşte la distanţa d de centrul corpului sferic, pe linia centrelor celor două sfere, de partea cavităţii?

4) Cu ajutorul unei rachete un corp e ridicat la înălţimea H deasupra Pămîntului.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

a) Care e intensitatea cîmpului gravific la acea înălțime H?

b) Ce viteză perpendiculară pe raza Pămîntului trebuie comunicată acestui corp pentru ca el să descrie o traiectorie circulară în jurul Pămîntului?

c) Ce perioadă de revoluție în jurul Pămîntului va avea acest corp?

Se va admite: $g_0 = 9{,}8 \text{ m/s}^2$, $R_0 = 6500 \text{ km}$, $H = 500 \text{ km}$ și se va neglija rezistența pe care atmosfera terestră o opune mișcării corpului.

141. 1) Se știe că excentricitatea elipsei pe care o descrie Pămîntul în jurul Soarelui este $e = 0{,}017$.

Determinați raportul vitezelor la periheliu (punctul traiectoriei cel mai apropiat de Soare) și la afeliu (punctul cel mai îndepărtat al traiectoriei de Soare).

2) O navă cosmică se mișcă pe o orbită circulară în jurul Lunii, care are raza egală cu dublul razei Lunii, anume $2.1{,}7.10^6$ m.

Cu ce viteză trebuie aruncat din navă un fanion, după o direcție tangentă la traiectorie, pentru ca el să cadă în partea opusă a Lunii?

După cît timp ajunge fanionul pe Lună? Care este excentricitatea elipsei pe care o descrie fanionul?

Se va avea în vedere că $g_{\text{Lună}} = \frac{1}{6} g_{\text{Pămînt}} \simeq 1{,}64 \text{ m/s}^2$.

Raza Lunii se va lua egală cu $1{,}7.10^6$ m, iar $M_L = \frac{1}{81} M_p \simeq 7{,}38 . 10^{22}$ kg.

4.6.3. <u>Rezolvarea problemelor</u>

139. 1) Avem:

$$F = f \frac{M^2}{r^2} = 6{,}67.10^{-11} . \frac{10^{14}}{10^6} N = 6{,}67 . 10^{-3} N = 6{,}67 \text{ milinewtoni.}$$

2) Forța de atracție a Soarelui este

$$F_s = f . \frac{M_p M_s}{R^2}$$, M_p fiind masa Pămîntului.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Această forță are acaracter centripetic.

De aceea $F_s = \frac{M_p V^2}{R}$; de aici găsim

$$V = \sqrt{\frac{fM_s}{R}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.2.10^{30}}{1,5.10^{11}}} \simeq 28,7 \text{ km/s}.$$

3) Cele două corpuri formează un sistem mecanic izolat, al cărui impuls total e nul tot timpul, acesta fiind nul la început.

Corpul de masă m , aflîndu-se în cîmpul gravific creat de corpul de masă M, are energia potențială

$$E_{p_1} = - f \frac{mM}{r_1}.$$

Începînd de la un anumit moment luat drept moment inițial, distanța dintre cele două corpuri se modifică din cauza atracției care se exercită între ele. Astfel, atunci cînd distanța dintre ele a devenit r_2, energia potențială a corpului de masă m este

$$E_{p_2} = \frac{-fmM}{r_2}$$

Variației energiei potențiale îi corespunde o variație a energiei cinetice a corpurilor:

$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = E_{p_1} - E_{p_2}$, V fiind viteza corpului de masă M, iar v viteza corpului de masă m.

Conservarea impulsului ne dă $MV = mv$.

Am obținut astfel sistemul

$$\begin{cases} MV = mv \\ \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = fmM(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}) \end{cases}$$

cu soluția

$$\begin{cases} V = \sqrt{\frac{2fm^2}{M+m}(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})} \\ v = \frac{M}{m} \cdot V. \end{cases}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

In cazul numeric rezultă

$$V = 0{,}42.10^{-6} \text{ m/s} \quad \text{și} \quad v = 3{,}78.10^{-6} \text{ m/s}.$$

4) Fie M masa Pămîntului și m masa corpului nostru. Atunci la suprafața Pămîntului avem:

$$G_0 = f\frac{mM}{R_0^2} = mg_0, \quad g_0 = \frac{fM}{R_0^2},$$ iar la distanța $r > R_0$ avem:

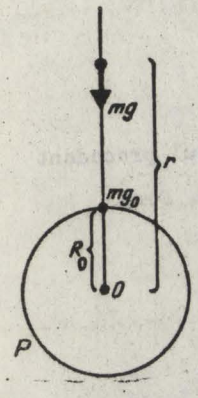


Fig.4.7o.

$$G = f\frac{mM}{r^2} = mg = m \cdot \frac{fM}{R_0^2} \cdot \frac{R_0^2}{r^2} = mg_0\frac{R_0^2}{r^2}$$

Acum $dL = \vec{G}.d\vec{r} = -mg_0\frac{R_0^2}{r^2}dr$, respectiv

$$L = \int_{R_0}^{r} -mg_0\frac{R_0^2}{r^2}dr = mg_0R_0^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right).$$

Astfel energia potențială a corpului la distanța r de centrul Pămîntului este

$$W = -L = mg_0R_0\left(1 - \frac{R_0}{r}\right).$$

Egalînd W cu $\frac{mV^2}{2}$, energia cinetică a corpului pe Pămînt, găsim

$$v = \sqrt{2gR_0\left(1 - \frac{R_0}{r}\right)}$$

Dacă $r \longrightarrow +\infty$, atunci $W \longrightarrow mg_0R_0$ și $v \longrightarrow \sqrt{2gR_0} = 11{,}17 \text{km/s}$.

14o. 1) Dacă punctul P de observație se află în afara corpului sferic, atunci $F = f\frac{mM}{r^2}$ și deci $\frac{F}{m} = g = f\frac{M}{r^2} = f\frac{4\pi a^3\rho}{3} \cdot \frac{1}{r^2}$ pentru $r \geqslant a$ (figura 4.71. a)).

Dacă punctul P se află în interiorul corpului sferic la distanța $r \in [0, a)$, construim sfera ajutătoare de rază r și centru O.

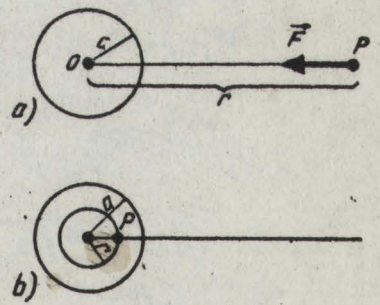


Fig.4.71.

Substanța aflată în afara sferei ajutătoare nu influențează starea cîmpului din interiorul acestei sfere. În particular ea nu influențează

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

cîmpul gravific din punctul de observaţie P. In punctul P creează cîmp gravific numai corpul sferic de rază r, a cărui intensitate se calculează ca în cazul precedent luînd r în loc de a; deci (figura 4.71.b)):

$$g = f \cdot \frac{4\pi r \rho}{3}, \quad r \in [0,a)$$

Astfel intensitatea cîmpului gravific cerut este

$$g(r) = \begin{cases} \frac{4\pi f \rho}{3} \cdot r, & 0 \leq r < a \\ \frac{4\pi f \rho a^3}{3} \cdot \frac{1}{r^2}, & r \geq a \end{cases}$$

2) Alegem axa Ox ca în figura 4.69. In exerciţiul precedent am văzut că forţa F din figură e proporţională cu distanţa. Deci $F = -\frac{mg_o}{R_o} \cdot x$. Ecuaţia de mişcare se scrie

$$m\ddot{x} = -\frac{mg_o}{R_o} \cdot x \quad \text{sau} \quad \ddot{x} + \frac{g_o}{R_o} x = 0.$$

Această ecuaţie diferenţială are soluţia

$$x(t) = X \cos\left(\sqrt{\frac{g_o}{R_o}} \cdot t + \varphi\right).$$

Dar la $t = 0$ avem $x(0) = R_o$. Rezultă $\varphi = 0$ şi $X = R_o$.

Apoi calculăm viteza:

(1) $$\dot{x}(t) = -\sqrt{g_o R_o} \cdot \sin\sqrt{\frac{g_o}{R_o}} \cdot t$$

Dacă punctul P ajunge în O, la momentul t^*, atunci $x(t^*) = 0$, adică

$$\sqrt{\frac{g_o}{R_o}} \cdot t^* = \frac{\pi}{2}; \text{ deci } t^* = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{R_o}{g_o}} \approx 20 \text{ minute.}$$

Acum $|v_o| = |\dot{x}(t^*)| = \sqrt{g_o R_o} = 7{,}98$ km/s.

3) Masa substanţei din cavitate este

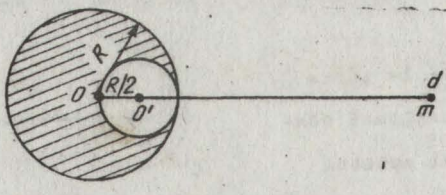


Fig.4.72.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$M' = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho = \frac{M}{8}.$$

Acum avem $F = f \cdot \frac{Mm}{d^2} - f \cdot \frac{M'm}{(d-\frac{R}{2})^2} = f \cdot Mm \frac{7d^2 - 8dR + 2R^2}{8d^2(d-\frac{R}{2})^2}$.

4)a) Se ştie că $g_H = g_0 \cdot \frac{R_0^2}{(R_0+H)^2}$; această formulă rezultă

din $G_H = mg_H = f\frac{mM}{(R_0+H)^2}$ şi $G_0 = mg_0 = f\frac{mM}{R_0^2}$.

Făcînd raportul $\frac{G_H}{G_0}$ găsim formula anunţată

$$\frac{g_H}{g_0} = \frac{R_0^2}{(R_0+H)^2}.$$

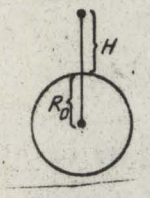


Fig.4.73.

Numeric avem $g_{500} = 980(\frac{6500}{7000}) \simeq 845$ cm/s^2.

b) Din $g_H = \frac{v^2}{R_0+H}$ rezultă $v = \sqrt{g_H(R_0+H)}$

Numeric găsim $v \simeq 7{,}7$ km/s.

c) $v = (R_0+H)\omega$ ne dă $\omega = \frac{v}{R_0+H}$, respectiv $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi(R_0+H)}{v}$

Numeric găsim T = 1 h 3o minute.

141. 1) Dacă avem în vedere că $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_1)}$, atunci

$r_{periheliu} = r_1 = \frac{1}{1+e}$ şi $r_{afeliu} = r_2 = \frac{1}{1-e}$.

La afeliu şi la periheliu viteza are numai componenta tangenţială $r\frac{d\theta}{dt}$; deci

$$v_1 = r_1\dot{\theta} = \frac{1}{r_1}(r_1^2\dot{\theta}_1) = \frac{C}{r_1} \; ; \; v_2 = \frac{C}{r_2}$$

Acum

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1+e}{1-e} = \frac{1+0{,}017}{1-0{,}017} \simeq 1{,}034.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Pentru ca fanionul lansat din A să ajungă în B, el trebuie aruncat cu viteza v în sens contrar vitezei $\vec{v}_n$, cu $v < v_n$, a.î. el să descrie o traiectorie eliptică (E) tangentă în B la suprafaţa Lunii L.

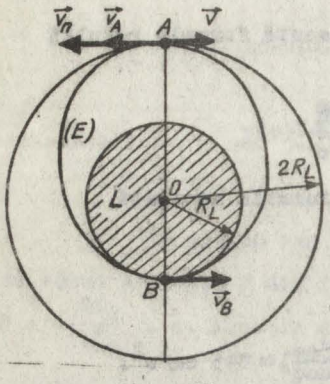


Fig.4.74.

Evident axa mare a acestei elipse este $2a = 3R_L$.

α) Pentru a deduce o relaţie între v_A şi v_B, vitezele fanionului în A şi în B, vom scrie că energia totală a fanionului de masă m se conservă în această mişcare.

Energia potenţială în A va fi $E_{pA} = -f\frac{mM_L}{2R_L}$, iar în B aceasta va fi $E_{pB} = -f\frac{mM_L}{R_L}$, formule asemănătoare cu acelea care dau energia potenţială a unei sarcini electrice q plasate la distanţa $2R_L$ şi R_L de o sarcină Q aşezată în O.

De aceea, conform cu legea de conservare a energiei, putem scrie

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{fmM_L}{2R_L} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{fmM_L}{R_L} \quad \text{sau}$$

$$\frac{v_A^2}{2} - \frac{fM_L}{R_L^2}\cdot\frac{R_L}{2} = \frac{v_B^2}{2} - \frac{fM_L}{R_L^2}\cdot R_L \quad \text{sau}$$

$$\frac{v_A^2}{2} - g_L\frac{R_L}{2} = \frac{v_B^2}{2} - g_L R_L \qquad (1)$$

β) O altă relaţie între v_A şi v_B o găsim dacă scriem a doua lege a lui Kepler (teorema ariilor):

$$(r^2\dot{\theta})_A = (r^2\dot{\theta})_B \quad \text{sau} \quad (2R_L\cdot\dot{\theta}\cdot 2R_L)_A = (R_L\cdot R_L\dot{\theta})_B \quad \text{sau}$$

$$2R_L \cdot v_A = R_L v_B \quad \text{sau} \quad v_B = 2v_A. \qquad (2)$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Din (1) și (2) deducem

$$v_A = \sqrt{\frac{g_L R_L}{3}} \simeq 964 \text{ m/s}, \quad v_B = 1928 \text{ m/s}.$$

γ) Să găsim și viteza v_n a navei pe orbită.

Din cauză că nava se mișcă pe o orbită circulară și că asupra ei acționează forța de atracție exercitată de Lună, putem scrie

$$f \cdot \frac{m_n M_L}{4 R_L^2} = \frac{m_n v_n^2}{2 R_L}, \text{ unde } m_n = \text{masa navei.}$$

Rezultă imediat $v_n = \sqrt{\frac{g_L R_L}{2}} = 1194$ m/s.

Evident $v_n > v_A$. De aceea viteza relativă cu care trebuie să aruncăm fanionul în sens contrar sensului în care se mișcă nava este $v = v_n - v_A = 1194 - 964 = 230$ m/s.

δ) Să găsim acum timpul în care fanionul ajunge din A în B. Folosim a III-a lege a lui Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f M_L}, \text{ în care } a = \frac{3}{2} \cdot 1{,}7 \cdot 10^6 \text{ m}, \; f = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$$

și $M_L = 7{,}38 \cdot 10^{22}$ kg. Rezultă $T \simeq 194$ minute, iar timpul de cădere este $\frac{T}{2} = 97$ minute.

ε) Excentricitatea elipsei descrise de fanion e se determină cu relația:

$$\frac{r_{minim}}{r_{max}} = \frac{1-e}{1+e}; \quad \frac{R_L}{2R_L} = \frac{1-e}{1+e}; \quad e = \frac{1}{3}.$$

§ 4.7. Mișcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale $\vec{F} = F(r)\vec{\rho}$, $\vec{\rho} = \frac{\vec{r}}{r}$.

4.7.1. Rezumat teoretic

Proprietăți: 1. Traiectoria e o curbă plană.

2. Mișcarea se face conform teoremei ariilor, i.e.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$r^2\dot{\theta} = C$.

3. Raza vectoare $r = r(\theta)$ verifică ecuaţia lui Binet

$$\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mC^2} .$$

Condiţiile iniţiale sau condiţiile lui Cauchy asociate ecuaţiei lui Binet sînt

$$r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \theta_0 ;$$

$$\dot{r}(0) = \dot{r}_0 = v_{r0} ; \quad r(0)\cdot\dot{\theta}(0) = r_0\dot{\theta}_0 = v_{\varepsilon 0} .$$

Apoi constanta ariilor C se determină cu ajutorul condiţiilor iniţiale $C = r_0^2\dot{\theta}_0 = r_0 v_0 \sin\alpha$.

4.7.2. Probleme

142. 1) Un punct material M parcurge o traiectorie plană de ecuaţie $r^n = a^n \cdot \cos n\theta$, a = constant, $a > 0$, sub acţiunea unei forţe centrale $\vec{F} = F\vec{\varepsilon}$. Să se arate că $F = -\frac{mk}{r^{2n+3}}$, $k > 0$.

2) Un punct material M se mişcă sub acţiunea unei forţe centrale, care este invers proporţională cu puterea k a distanţei. Se ştie că punctul descrie un cerc (forţa centrală îşi are originea într-un punct O al cercului).

Să se afle exponentul k.

AMM, Concursul W.L.Putnam

3) Centrul de greutate M al unei comete descrie o elipsă şi acceleraţia sa este contant dirijată către un focar F al acestei elipse. Fie A, A' vîrfurile axei mari şi

$FA' = r_1$, $FA = r_0$ şi T durata unei revoluţii.

Să se afle viteza lui M în funcţie de raza vectoare $FM = r$ şi de datele problemei r_0, r_1.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

143. 1) Să se afle mişcarea unui punct material M de masă egală cu unitatea, atras către originea O de o forţă centrală $F = \frac{12}{\rho^3} + \frac{4a^2}{\rho^5}$, $\rho = OM$, $a \in R_+^*$. La momentul $t = 0$, avem $\rho_0 = a$, $\theta_0 = \pi$ viteza iniţială $\vec{v}_0$ fiind paralelă cu bisectoarea interioară a unghiului xOy, îndreptată către y - ii pozitivi şi egală cu $v_0 = \frac{4}{a}$.

Să se determine explicit ρ şi t în funcţie de θ şi să se calculeze timpul T în care mobilul ajunge în origine.

In acest timp raza vectoare OM descrie o arie egală cu $T\sqrt{2}$.

Examenul de capacitate pentru băieţi Bucureşti.

2) Fie P un punct material supus acţiunii unei forţe centrale. Dacă el îşi începe mişcarea din P_0, în care punct viteza sa iniţială $\vec{v}_0$ este dirijată către O, atunci punctul material se mişcă pe dreapta determinată de O şi de P_0.

4.7.3. Rezolvarea problemelor.

142. 1) Avem $\dot{r} = \frac{-a^n \sin n\theta \cdot \dot{\theta}}{r^{n-1}}$; dar $r^2\dot{\theta} = C$; deci

$$\dot{r} = -a^n C \frac{\sin n\theta}{r^{n+1}}$$

Acum calculăm a doua derivată:

$$\ddot{r} = -a^n C \frac{n \cos n\theta \cdot \dot{\theta} \cdot r^{n+1} - (n+1) r^n \dot{r} \cdot \sin n\theta}{r^{2n+2}} =$$

$$= (n+1)a^n \cdot C \frac{\sin n\theta}{r^{n+2}} \cdot \left(-a^n C \frac{\sin n\theta}{r^{n+1}}\right) -$$

$$- \frac{n a^n C \frac{C}{r^2} \cdot \cos n\theta \cdot r^{n+1}}{r^{2n+2}} = -(n+1)a^{2n}C^2 \frac{1-\cos^2 n\theta}{r^{2n+3}} - \frac{nC^2}{r^3} =$$

$$= -\frac{(n+1)C^2a^{2n}}{r^{2n+3}} + \frac{(n+1)C^2}{r^3} - \frac{nC^2}{r^3} = \frac{C^2}{r^3} - \frac{(n+1)C^2a^{2n}}{r^{2n+3}}$$

Acum să estimăm pe $-r(\dot{\theta})^2$; avem

$$-r\dot{\theta} = -r\frac{C^2}{r^4} = -\frac{C^2}{r^3}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Folosind cea de a doua lege a lui Newton, putem scrie

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F, \text{ respectiv}$$

$$F = m\left[\frac{C^2}{r^3} - \frac{(n+1)C^2a^{2n}}{r^{2n+3}} - \frac{C^2}{r^3}\right], \quad F = -\frac{m(n+1)C^2a^{2n}}{r^{2n+3}}.$$

Deci $F = \frac{-mk}{r^{2n+3}}$, unde $k = (n+1)C^2a^{2n} > 0$.

2) Fie O centrul forței atractive și $OM_0 = A$ diametrul cercului, pe care se mișcă M.

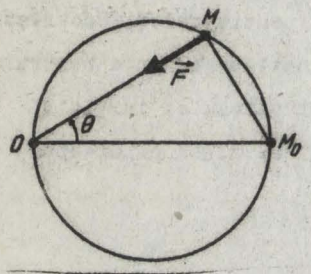


Fig.4.75.

Avem $OM = r = A\cos\theta$ (1)

Legea a II-a a lui Newton se scrie

$$ma_\rho = -F \quad (2)$$

$$ma_\varepsilon = 0 \quad (3)$$

Cum $a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ și $a_\varepsilon = \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}(r^2\dot{\theta})$, avem

$$F = -m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (2')$$

și

$$r^2\dot{\theta} = C \quad (3').$$

Din (1) și (3') deducem

$$\dot{r} = -A\dot{\theta}\sin\theta = -AC\frac{\sin\theta}{r^2}, \quad \ddot{r} = \frac{-AC^2\cos\theta}{r^4} + \frac{2AC\sin\theta}{r^3}\cdot\dot{r} =$$

$$= -\frac{C^2}{r^3} - \frac{2A^2C^2}{r^5}\cdot\sin^2\theta. \text{ Acum (2') ne dă}$$

$$F = 2m\left[\frac{C^2}{r^3} + \frac{A^2C^2(1-\cos^2\theta)}{r^5}\right] = \frac{2mA^2C^2}{r^5}; \text{ deci } k = 5$$

3) Dacă p este parametrul elipsei, e excentricitatea ei și dacă alegem $\theta_1 = 0$, ecuația elipsei în coordonate polare este

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad (1)$$

Conform enunțului, avem

$$r_0 = \frac{p}{1+e}, \text{ pentru } \theta = 0$$

$$r_1 = \frac{p}{1-e}, \text{ pentru } \theta = \pi,$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

De aici deducem pe e și pe p:

$$\begin{cases} e = \dfrac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0} \\ p = \dfrac{2r_0 r_1}{r_0 + r_1} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{\dfrac{2r_0 r_1}{r_0 + r_1}}{1 + \dfrac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0} \cdot \cos\theta}$$

și elipsa este perfect determinată.

Avem în continuare

$$e = \frac{c}{a}, \quad r_0 + r_1 = 2a, \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad 2c = r_1 - r_0.$$

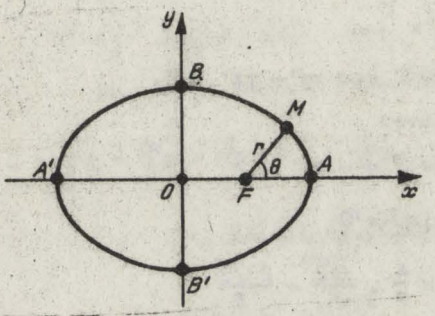


Fig.4.76.

Rezultă imediat semiaxele elipsei:

$$a = \frac{r_0 + r_1}{2}, \quad b = \sqrt{r_0 r_1}.$$

In coordonatele carteziene ecuația traiectoriei se scrie:

$$\frac{4x^2}{(r_0 + r_1)^2} + \frac{y^2}{r_0 r_1} - 1 = 0.$$

Pentru a deduce expresia vitezei în funcție de r, observăm că $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ (1)

Cantitatea $\dot{\theta}^2$ o deducem din legea ariilor $r^2\dot{\theta} = C$, unde $C = \frac{2\mathcal{F}ab}{T}$.

Deci

$$\dot{\theta} = \frac{2\mathcal{F}ab}{T} \cdot \frac{1}{r^2}. \qquad (2)$$

Din ecuația în coordonate polare a elipsei, pe care o scriem și astfel

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta, \qquad (3)$$

prin derivare în raport cu t, găsim

$$\frac{p\dot{r}}{r^2} = e\dot{\theta}\sin\theta; \quad \frac{p\dot{r}}{r^2} = e \cdot \frac{C\sin\theta}{r^2};$$

deci

$$\dot{r}^2 = e^2C^2(1 - \cos^2)/p^2. \qquad (4)$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Acum putem să-l înlocuim în (1) pe $\dot{\theta}$ cu expresia dată (2), pe $\dot{r}^2$ cu expresia dată de (4) și pe $\cos\theta$ cu $\frac{1}{e}(\frac{p}{r} - 1)$, dedus din (3).

In final găsim

$$v^2 = \frac{\mathcal{T}^2}{T^2}(r_0 + r_1)^2\left[\frac{r_0+r_1}{r} - 1\right].$$

143. 1) Traiectoria punctului material (a mobilului) este o curbă plană determinată de OM_0, poziția sa inițială, și de $\vec{v}_0$ vectorul viteză inițială. Să luăm acest plan ca plan xOy.

Fie deci $M \left| \begin{matrix} x(t) & \rho \\ y(t) & \theta \end{matrix} \right.$

Teorema ariilor ne dă $\rho^2\dot{\theta} = C$ sau $xy' - yx' = C$.

La momentul inițial însă avem

$$x_0 = \rho_0\cos\theta_0 = a\cos\pi = -a$$

$$y_0 = \rho_0\sin\theta_0 = a\sin\pi = 0$$

$$v_{ox} = v_0\cos 45^0 = \frac{4}{a}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{a}$$

$$v_{oy} = v_0\sin 45^0 = \frac{4}{a}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{a}$$

Cu aceste date deducem pe C:

$$C = -a\cdot\frac{2\sqrt{2}}{a} - 0\cdot\frac{2\sqrt{2}}{a} = -2\sqrt{2}.$$

Acum teorema ariilor se scrie

$$\boxed{\rho^2\cdot\frac{d\theta}{dt} = -2\sqrt{2}} \qquad (1)$$

Vom scrie apoi teorema energiei

$$d(\frac{mv^2}{2}) = Fd\rho$$

sau, $\vec{F}$ fiind o forță de atracție,

$$\frac{dv^2}{2} = -(\frac{12}{\rho^3} + \frac{4a^2}{\rho^5})d\rho \qquad \text{sau}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{6}{\rho^2} + \frac{a^2}{\rho^4} + K$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Cu ajutorul condiţiilor iniţiale $\rho_0 = a$ şi $v_0 = \frac{4}{a}$, deducem

$$\frac{16}{2a^2} = \frac{6}{a^2} + \frac{1}{a^2} + K, \text{ respectiv } K = \frac{1}{a^2}$$

Astfel v^2 se scrie

$$\boxed{v^2 = \frac{12}{\rho^2} + \frac{2a^2}{\rho^4} + \frac{2}{a^2}} \qquad (2)$$

Dar, pe de altă parte, $v^2 = (\frac{ds}{dt})^2 = \frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = (\frac{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}{dt^2})$.

Ţinînd cont de teorema ariilor, găsim

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \frac{1}{\rho^2}(\rho^2\dot{\theta})^2 \quad \text{sau} \quad \boxed{v^2 = \dot{\rho}^2 + \frac{\delta}{\rho^2}} \qquad (3)$$

Cu ajutorul lui (2), scriem pe (3) astfel

$$\frac{12}{\rho^2} + \frac{2a^2}{\rho^4} + \frac{2}{a^2} = \dot{\rho}^2 + \frac{8}{\rho^2} \text{ ; apoi deducem}$$

$$\dot{\rho}^2 = \frac{4a^2\rho^2 + 2a^4 + 2\rho^4}{a^2\rho^4}$$

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2(a^2+\rho^2)^2}{a^2\rho^4}, \quad \dot{\rho} = \pm\sqrt{2}\,\frac{a^2+\rho^2}{a\rho^2} \qquad (4)$$

Cum $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$, rezultă că

$\frac{d\rho}{dt}$ este proiecţia vitezei pe raza vectoare OM.

La momentul iniţial însă avem (vedeţi figura 4.77. cu condiţiile iniţiale):

$$\left.\frac{d\rho}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{4}{a}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{a}$$

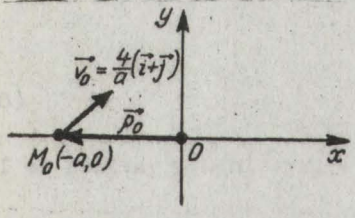


Fig.4.77.

De acea luăm semnul minus în (4)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\sqrt{2}\,\frac{a^2+\rho^2}{a\rho^2}$$

De aici deducem

$$-\sqrt{2}\,dt = \frac{a\rho^2 d\rho}{\rho^2+a^2};$$

Cda. 236/987 fasc. 19

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$-\sqrt{2}\,dt = \frac{a(\rho^2+a^2-a^2)d\rho}{\rho^2+a^2}$$

$$-\sqrt{2}\,t = a(\rho - a\,\mathrm{arctg}\,\frac{\rho}{a}) + C_1$$

Din condiţia iniţială $\rho(0) = \rho_0 = a$ deducem pe C_1. In adevăr la $t = 0$ avem $\rho_0 = a$; deci $0 = a^2(1 - \frac{\pi}{4}) + C_1$, de unde

$$C_1 = a^2(\frac{\pi}{4} - 1)$$

Astfel găsim

$$\boxed{\sqrt{2}\,t = a(a-\rho) + a^2\left[\,\mathrm{arctg}\,\frac{\rho}{a} - \frac{\pi}{4}\,\right]} \qquad (5)$$

Cînd t variază de la o la T, ρ variază de la a la zero, adică mobilul pleacă din M_0 şi ajunge în origine.

Din relaţia precedentă, cu $t = T$ şi $\rho = 0$, găsim

$$\sqrt{2}\,T = a^2 - \frac{a^2\pi}{4}\,, \text{ de unde}$$

$$\boxed{T = a^2\,\frac{4-\pi}{4\sqrt{2}}} \qquad (6)$$

Ţinînd seama de teorema ariilor, putem scrie

$$d\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{\rho^2}\,dt \quad \text{sau} \quad d\theta = \frac{2a\,d\rho}{a^2+\rho^2} \quad \text{sau}$$

$$\theta = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\rho}{a} + C_2 \qquad (7)$$

Dar la $t = 0$ avem $\theta_0 = \pi$ şi $\rho_0 = a$. Deci relaţia (7) ne permite să găsim pe C_2:

$$\pi = \frac{\pi}{2} + r_2 \;;\; C_2 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Expresia lui θ devine:

$$\theta = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\rho}{a} + \frac{\pi}{2}$$

sau, în ipoteza potrivită,

$$\boxed{\rho = a\,\mathrm{tg}(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} \qquad (8)$$

Cînd mobilul pleacă din M_0 şi ajunge în O, ρ variază de la $\rho_0 = a$ la zero, iar θ de la π la Θ

Din (8) deducem

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\Theta = \frac{\pi}{2}.$$

Aria măsurată de raza vectoare este

$$A = \left|\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{M_0O}} \rho^2 d\theta\right| = \left|\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{M_0M}} -2\sqrt{2}\ dt\right| = \left|-\sqrt{2}\int_0^T dt\right| = \sqrt{2}\,T.$$

2) Conform enunțului $\vec{F} = F\vec{r}$, unde $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Teorema momentului cinetic ne spune că în timpul mișcării avem $\vec{K} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$. Deci $\vec{K} = \overrightarrow{const.}$ i.e.

$\vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 = \vec{0}$, unde $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}_0$, adică $\vec{v}$ este coliniar cu $\vec{r}$.

Rezultă că punctul material descrie o traiectorie rectilinie, anume dreapta determinată de O și de P_0.

§ 4.8. Mișcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe elastice $\vec{F} = -k\vec{r}$.

4.8.1. Rezumat teoretic

A determina această mișcare înseamnă a rezolva problema lui Cauchy:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}, \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0\ , \ \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0.$$

Această problemă are soluția unică

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos(\omega t) + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t;$$

$$\vec{v}(t) = -\vec{r}_0 \omega \sin(\omega t) + \vec{v}_0 \cos(\omega t), \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Dacă $\vec{r}_0$ și $\vec{v}_0$ nu sînt coliniari traiectoria punctului e o curbă plană închisă, anume o elipsă cu centrul în punctul atractiv, iar dacă $\vec{r}_0$ și $\vec{v}_0$ sînt coliniari atunci traiectoria e un segment de dreaptă și obținem ceea ce se numește un oscilator liniar (armonic), cînd $x = A\cos(\omega t - \varphi)$.

Mișcarea decurge conform legii ariilor: $r^2\dot{\theta} = C$.

Viteza areolară Ω este egală cu $\frac{C}{2}$, i.e. $\Omega = \frac{C}{2}$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Perioada mişcării este $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

După un interval de timp egal cu T/2 punctul material ocupă o poziţie simetrică în raport cu O (centrul atractiv) faţă de poziţia iniţială.

4.8.2. Probleme

144. 1) Un punct material P de masă m este atras de punctul fix O cu o forţă proporţională cu distanţa OP.

Să se demonstreze că mişcarea lui P e plană şi în general eliptică.

2) Un punct material P de masă m se mişcă pe o dreaptă x'Ox aspră, sub acţiunea forţei $F = k^2x$. La momentul t = 0 punctul P se află la distanţa a de origine în repaus.

Integraţi ecuaţia de mişcare a punctului material respectiv, ştiind că coeficientul de frecare este μ

3) Un punct material M(x,y) de masă m se mişcă în planul xOy sub acţiunea unei forţe care derivă din potenţialul:

$$U(x,y) = -\frac{1}{2} m\omega^2x^2, \quad \omega = \text{constant}.$$

a) Să se scrie şi să se integreze ecuaţiile diferenţiale verificate de x(t), y(t), ştiind că $x_o = 0$, $y_o = 0$, $v_{ox} = v_o \cos\alpha$, $v_{oy} = v_o \sin\alpha$

b) Să se scrie ecuaţia carteziană a traiectoriei şi să se reprezinte grafic.

c) Să se scrie expresia modulului vitezei v în funcţie de x şi să se arate că

$$\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{v_o^2} x^2} \cdot \sin\varphi = \sin\alpha \ , \text{ unde } \operatorname{tg}\varphi = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

145. 1) Un punct material execută o mişcare oscilatorie armonică

$$x = A \sin \omega t, \quad t \in [0,T]$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Se ştie că pentru $x = x_1$ şi $x = x_2$ avem $v = v_1$ şi $v = v_2$. Să se determine A şi ω

2) De un resort cu constanta elastică egală cu 400 N/m e fixat un corp de masă m = 0,25 kg. In cursul mişcării, asupra corpului se exercită o forţă avînd intensitatea proporţională cu viteza $F_r = -2\alpha x$ newtoni

La momentul iniţial t = 0 avem

$$x(0) = 0,1 \; ; \; \dot{x}(0) = 4 \text{ m/s}.$$

Să se determine legea de mişcare a corpului.

146. 1) O bară OA de lungime ℓ şi masă neglijabilă este articulată în O şi susţine la capătul A un corp mic de masă m.

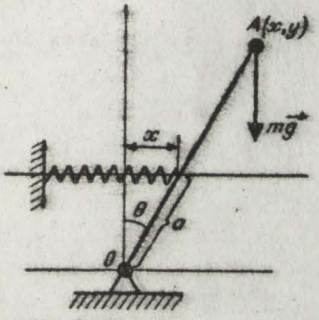


Fig.4.78.

La distanţa a de capătul O se prinde un resort, de constantă elastică μ. In cazul micilor oscilaţii ale sistemului, să se afle pulsaţia proprie a mişcării corpului mic de masă m.

2) Un punct material M este atras de un centru fix O cu o forţă elastică plus o forţă de gravitaţie universală.

a) Să se demonstreze că traiectoria punctului este plană.

b) Să se scrie ecuaţia diferenţială a traiectoriei în coordonate polare.

c) Să se aplice teorema momentului şi a energiei, integrîndu-le.

FMF, Bucureşti, 1949

4.8.3. Rezolvarea problemelor

144. 1) Conform enunţului avem:

$$\vec{F} = -F\vec{r} = -k \cdot OP \frac{\vec{OP}}{OP} = -k.\vec{OP} = -k\vec{r}.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Teorema momentului cinetic

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

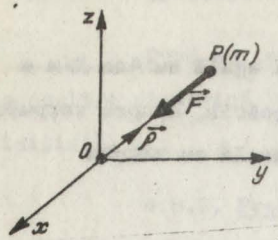


Fig.4.79.

în acest caz particular ne dă

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times (-k\vec{r}) = \vec{0}$$

Deci

$$\vec{r} \times m\vec{v} = \vec{C}$$

De aici prin înmulţire scalară cu $\vec{r}$ obţinem

$$\vec{r}(\vec{r} \times m\vec{v}) = 0, \text{ adică } \vec{r} \cdot \vec{C} = 0 \text{ sau}$$

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0 \qquad (1)$$

şi rezultă că mişcarea lui P e o curbă plană, situată în planul de ecuaţie (1).

Alegem atunci planul mişcării ca plan xOy; vom avea în continuare

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{şi} \quad m\ddot{y} = -ky.$$

Aceste ecuaţii diferenţiale se integrează şi obţinem ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului P:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \\ y(t) = C_3 \cos\omega t + C_4 \sin\omega t \end{cases} \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}, \ t \geq 0.$$

Dacă eliminăm pe t, găsim ecuaţia carteziană a traiectoriei lui P, care e o elipsă sau o elipsă degenerată într-un segment de dreaptă.

Faptul că traiectoria nu are puncte la ∞ rezultă şi din inegalităţile imediate:

$$|x(t)| \leq |C_1| + |C_2|$$

$$|y(t)| \leq |C_3| + |C_4|, \quad \forall t \geq 0.$$

2) Ec. de mişcare este $m\ddot{x} = k^2x - \mu mg$ cu soluţia generală

$$x(t) = C_1 \operatorname{ch}\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right) + C_2 \operatorname{sh}\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right) + \frac{\mu mg}{k^2}$$

Condiţiile iniţiale $x(0) = a$ şi $\dot{x}(0) = 0$ ne dau $C_2 = 0$ şi

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$C_1 = a - \frac{\mu mg}{k^2}$. Deci

$$x(t) = (a - \frac{\mu mg}{k^2})ch(\frac{k}{\sqrt{m}}\, t) + \frac{\mu mg}{k^2} \quad \text{etc.}$$

3) a) Avem $F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -m^2\omega x$; $F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$;

$m\ddot{x} = F_x$, $m\ddot{y} = F_y$; deci

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \\ \ddot{y} = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha, \ \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

b) Rezultă $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, $y = C_1 t + C_2$.

Condiţiile iniţiale ne dau $\varphi = 0$, $C_1 = v_0 \sin\alpha$, $C_2 = 0$, $A = \frac{v_0 \cos\alpha}{\omega}$. Deci ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului sînt:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{\omega} \sin\omega t & (1) \\ y(t) = v_0 \sin\alpha . t \qquad t \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Acum ecuaţia carteziană se obţine eliminînd timpul între ecuaţiile (1) şi (2). Rezultă

$x(y) = \frac{v_0 \cos\alpha}{\omega} \sin(\frac{\omega}{v_0 \sin\alpha} \cdot y)$, cu graficul

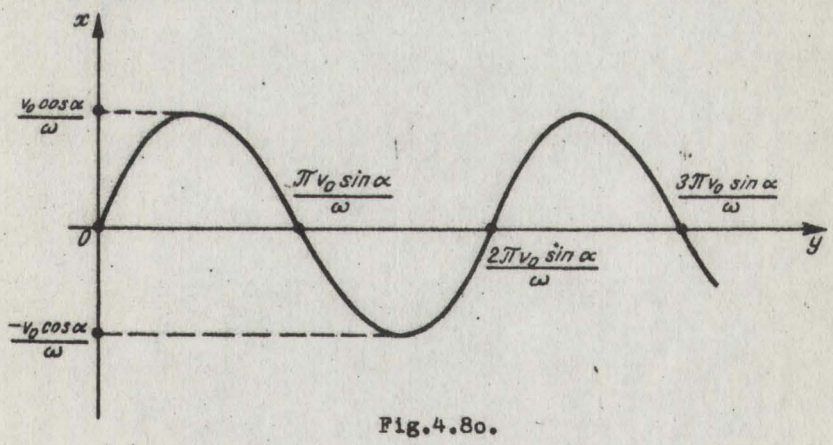


Fig.4.8o.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

c) In acest caz luăm U = - V și teorema energiei are expresia finită:

$$\frac{1}{2} mv^2 + V = \text{constant.}$$

La momentul inițial avem $v = v_0$, iar $U = 0$.

Deci $\frac{1}{2}\left(mv^2+m\omega^2x^2\right)= \frac{1}{2} mv_0^2$, ceea ce ne conduce la

$$v = v_0\sqrt{1 - \frac{\omega^2x^2}{v_0^2}}$$

Am văzut $y = v_0 \sin \alpha . t$, deci $\dot{y} = v_0 \sin \alpha$.

Dacă avem în vedere că vectorul viteză e tangent la traiectorie și că el face cu axa Ox un unghi φ, atunci vom avea:

$$v_x = v \cos \varphi \text{ și } v_y = v \sin \varphi$$

De aceea $v \sin \varphi = v_0 \sin \varphi$ ne permite să scriem

$$v_0\sqrt{1 - \frac{\omega^2x^2}{v_0^2}} \sin\varphi = v_0 \cdot \sin \alpha \text{, adică}$$

$$\sqrt{1 - \frac{\omega^2x^2}{v_0^2}} \sin\varphi = \sin \alpha,$$

care e tocmai relația cerută.

145. 1) Avem $\begin{cases} x_1 = A \sin \omega t_1, \\ x_2 = A \sin \omega t_2, \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 = A\omega \cos \omega t_1 \\ v_2 = A\omega \cos \omega t_2 . \end{cases}$

Eliminăm pe t_1 și t_2 (din $[0,T]$) și avem

$$\begin{cases} x_1^2 + (\frac{v_1}{\omega})^2 = A^2 \\ x_2^2 + \frac{v_2^2}{\omega^2} = A^2, \end{cases}$$

Din acest sistem deducem

$$A = \sqrt{\frac{x_1^2v_2^2 - x_2^2v_1^2}{v_2^2-v_1^2}}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2) Ecuația de mișcare a corpului este $m\ddot{x} = -400\,x - 20\,\dot{x}$ sau

$$\ddot{x} + 80\,\dot{x} + 1600\,x = 0. \qquad (1)$$

La această ecuație trebuie să adăugăm condițiile inițiale:

$$x(0) = 0{,}1 \text{ m} \quad \text{și} \quad \dot{x}(0) = 4 \text{ m/s} \qquad (2)$$

Orice soluție a ecuației (1) este de forma

$$x(t) = (C_1 t + C_2)e^{-40t}, \quad t \geq 0,$$

care obligată să respecte condițiile (2) devine

$$x(t) = (8t + 0{,}1)e^{-40t} \text{ metri.}$$

146. 1) Folosim teorema momentului cinetic

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum M_O.$$

Avem $K_O = mv\ell = m\ell\,\dot{\theta}\,\ell = m\ell^2\dot{\theta}$. Apoi

$M_O = M_{mg} + M_{elastic}$; $M_{mg} = mg\ell \sin\theta$ și

$M_{elatic} = \mu x\, a \cos\theta = \mu\, a \sin\theta \cdot a\cos\theta = a^2\mu \sin\theta\cos\theta$.

Deci $(m\ell^2\dot{\theta})' = mg\ell \sin\theta - a^2\mu \sin\theta\cos\theta$ sau

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\mu a^2}{m\ell^2}\cos\theta - \frac{g}{\ell}\right)\sin\theta = 0 \quad \text{(ecuație diferențială neliniară)}$$

Pentru θ mic, luăm $\cos\theta \simeq 1$, $\sin\theta \simeq \theta$. Cu aceasta, ecuația diferențială devine

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0, \text{ unde } \omega^2 = \frac{\mu a^2}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell} > 0. \text{ Deci}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu a^2}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}} \text{ rad/sec.}$$

2) a) Fie m masa punctului. Avem

$$\vec{F}_1 = -k\vec{r} \text{ (forța elastică) și } \vec{F}_2 = -\frac{k_2}{r^2}\vec{\rho};$$

acum ecuația lui Newton se scrie:

$$(1) \qquad m\ddot{\vec{r}} = -\left(k_1 r + \frac{k_2}{r^2}\right)\vec{\rho}, \ \vec{\rho} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Înmulțim vectorial în (1) cu $\vec{\rho} = \frac{\vec{r}}{r}$ și găsim

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$m\ddot{\vec{r}} \times \frac{\vec{r}}{r} = \vec{0}, \text{ căci } \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0} \qquad (2)$$

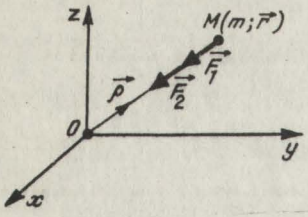


Fig.4.81.

Dar (2) se mai scrie

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) = \vec{0} \text{ sau } \dot{\vec{r}} \times \vec{r} = \vec{C} \qquad (3)$$

In (3) înmulţim acum scalar cu $\vec{r}$ şi avem $\vec{C} \cdot \vec{r} = 0$ sau $C_1x + C_2y + C_3z = 0$, ceea ce ne arată că punctul M(m; x,y,z) se găseşte în planul cu normala $\vec{N}(C_1, C_2, C_3)$, plan ce trece prin originea O.

b) Ecuaţia diferenţială a traiectoriei în coordonate polare este ecuaţia diferenţială a lui Binet:

$$\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mC^2} \text{ sau } \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{mC^2}(k_1r^3 + k_2),$$

C fiind constanta ariilor, iar r şi θ coordonatele polare ale punctului M.

c) Forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ fiind forţe centrale, teorema momentului cinetic se scrie

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{0};$$

de aici prin integrare obţinem $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{C}_1$, unde $\vec{C}_1$ e un vector constant.

Tot din cauza caracterului central al forţei $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, rezultă că mişcarea punctului M se face conform teoremei ariilor.

Teorema energiei, în acest caz, capătă forma ecuaţiei diferenţiale

$$d(mv^2) = -2(k_1r + \frac{k_2}{r^2})dr.$$

Această e.d. se integrează imediat şi ne conduce la următoarea integrală primă a mişcării punctului M

$$mv^2 + k_1r^2 - \frac{2k_2}{r} = h, \text{ cu h constantă de integrare.}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

§ 4.9. Dinamica unor sisteme de puncte materiale

4.9.1. Probleme

147. 1) Trei puncte materiale libere A, B, C de mase egale se atrag între ele după o lege oarecare. Viteza inițială a punctului A are modulul kAB și este dirijată după AB, iar viteza inițială a punctului B are mărimea k.BC și este orientată după BC.

Să se determine modulul vitezei punctului C și orientarea ei, astfel încît centrul de masă al celor trei puncte să rămînă în repaus.

2) Două particule avînd masele m_1 și m_2 se mișcă cu viteza relativă $\vec{v}_r$, iar viteza centrului de masă este $\vec{v}$. Dacă $M = m_1 + m_2$ e masa totală, iar $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ este masa numită redusă a sistemului, să se arate că energia cinetică totală a celor două particule este egală cu

$$E = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2}\mu v_r^2.$$

148. 1) Trei puncte materiale A, B, C, de aceeași masă, se atrag mutual proporțional cu distanța, factorul de proporționalitate fiind același λ^2 pentru cele 3 puncte.

a) Să se afle mișcarea centrului de masă O al celor 3 puncte.

b) Cum trebuie alese vitezele inițiale $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$, $\vec{v}_C$ ale punctelor A, B, C pentru ca O să rămînă fix? Ce traiectorii descriu atunci punctele A, B, C?

c) Se pot alege vitezele inițiale a.î., O rămînînd fix, triunghiul ABC să aibă o mărime fixă?

d) In acest ultim caz, care sînt mișcările punctelor A,B,C?

2) Două inele M și M' de aceeași masă și de dimensiuni neglijabile alunecă de-a lungul a două tije paralele T și T'.

Ele se atrag reciproc cu o forță proporțională cu distanța.

a) Pentru ce viteze inițiale ale inelelor M și M' punctul O, mijlocul segmentului de dreaptă MM', rămîne imobil?

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

b) Care sînt, în acest caz, mişcările lui M şi M', cînd se neglijează frecările?

149. 1) Pe două bare orizontale, situate într-un plan vertical la distanţa 2a una de alta, pot aluneca fără frecare două particule materiale P_1 şi P_2 de mase egale $m_1 = m_2 = m$. Punctele se atrag cu o forţă proporţională cu distanţa P_1P_2, factorul de proporţionalitate fiind k.

Se cere

a) Mişcarea centrului de greutate al sistemului;

b) Mişcarea particulelor faţă de centrul de greutate.

2) Un sistem de n puncte materiale $P_i(i = \overline{1,n})$ este supus numai acţiunii forţelor interioare, care se exercită între punctele sistemului. Presupunînd masele punctelor egale între ele $m_i = m$ şi forţele interioare elastice, atractive şi de "modul" k, se cere:

a) Mişcarea centrului de masă al sistemului.

b) Să se arate că acceleraţia unui punct arbitrar P din sistem e îndreptată în fiecare moment către centrul de masă C al sistemului.

c) Să se afle mişcarea relativă a sistemului faţă de centrul de masă.

4.9.2. Rezolvarea problemelor.

147. 1) Evident vectorul de poziţie al centrului de masă al celor 3 puncte de mase egale este:

$$\bar{r} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{3}(\bar{r}_A + \bar{r}_B + \bar{r}_C),$$

De aici prin derivare în raport cu t găsim:

$$\bar{v} = \frac{1}{3}(\bar{v}_A + \bar{v}_B + \bar{v}_C), \qquad (1)$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

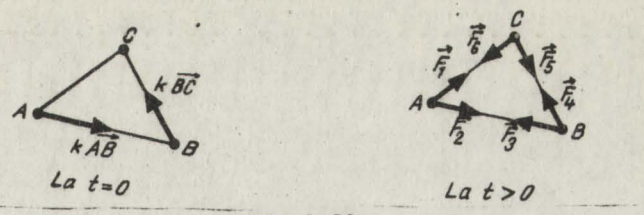


Fig.4.82.

Dar la t = 0 avem $\overline{v}_A = k\,\overrightarrow{AB}$ şi $\overline{v}_B = k\,.\,\overrightarrow{BC}$. Dacă în (1) facem t = 0 şi ţinem seama că $\overline{v}(0) = 0$, găsim

$$k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) + \overline{v}_C = \overline{0} \quad \text{sau} \quad \overline{v}_C = -\,k.\overrightarrow{AC}.$$

Mai departe, acceleraţia centrului de masă va fi

$$\overline{a}_1 = \dot{\overline{v}} = \frac{1}{3}(\dot{v}_A + \dot{v}_B + \dot{v}_C).$$

Dar pentru ca acesta să rămînă în repaus vom cere ca $\overline{a}_1$ să fie nul, deci $\dot{\overline{v}}_A + \dot{\overline{v}}_B + \dot{\overline{v}}_C = \overline{0}$.

In continuare, teorema impulsului ne dă

$$m\dot{\overline{v}}_A = \overline{F}_1 + \overline{F}_2, \quad m\dot{\overline{v}}_B = \overline{F}_3 + \overline{F}_4, \quad m\dot{\overline{v}}_C = \overline{F}_5 + \overline{F}_6.$$

Prin urmare găsim:

$$\dot{\overline{v}}_A + \dot{\overline{v}}_B + \dot{\overline{v}}_C = \frac{1}{m}\sum \overline{F} = \overline{0}, \text{ deoarece}$$

$$\overline{F}_2 + \overline{F}_3 = \overline{0}, \quad \overline{F}_4 + \overline{F}_5 = \overline{0}, \quad \overline{F}_6 + \overline{F}_1 = \overline{0}.$$

2) Avem evident

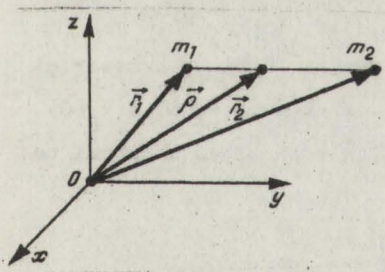


Fig.4.83.

$$\overline{\rho} = \frac{m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2}{m_1+m_2}; \quad \dot{\overline{\rho}} = \frac{m_1\dot{\overline{r}}_1 + m_2\dot{\overline{r}}_2}{m_1+m_2} \qquad (1)$$

Dacă notăm $\overline{v}_1 = \dot{\overline{r}}_1$, $\overline{v}_2 = \dot{\overline{r}}_2$; $\overline{v} = \dot{\overline{\rho}}$, atunci relaţia (1) se mai scrie:

$m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = (m_1+m_2)\overline{v}$. Fie $\overline{v}_r = \overline{v}_1 - \overline{v}_2$.

Atunci din sistemul

$$\begin{cases} \overline{v}_1 - \overline{v}_2 = \overline{v}_r \\ m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = M\overline{v}, \quad M = m_1+m_2 \end{cases}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

deducem

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \frac{m_2\vec{v}_r}{M}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \frac{m_1\vec{v}_r}{M}$$

Acum găsim:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2}\mu v_r^2.$$

148. 1) a) Fie $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ cele trei puncte materiale.

Ele avînd aceeaşi masă, centrul de masă O al lor va avea coordonatele

$$\frac{\sum x_i}{3}, \quad \frac{\sum y_i}{3}, \quad \frac{\sum z_i}{3},$$

adică va coincide cu punctul de intersecţie a medianelor triunghiului.

Viteza iniţială a lui O va fi

$$\vec{v}_o\Big|_{t=0} = \frac{\dot{x}_1\vec{i}}{3} + \frac{\dot{y}_1\vec{j}}{3} + \frac{\dot{z}_1\vec{k}}{3} + \frac{\dot{x}_2\vec{i}+\dot{y}_2\vec{j}+\dot{z}_2\vec{k}}{3} + \frac{\dot{x}_3\vec{i}+\dot{y}_3\vec{j}+\dot{z}_3\vec{k}}{3} =$$

$$= \frac{\vec{v}_A(0)}{3} + \frac{\vec{v}_B(0)}{3} + \frac{\vec{v}_C(0)}{3},$$

unde $\vec{v}_A(0)$, $\vec{v}_B(0)$ şi $\vec{v}_C(0)$ sînt vitezele iniţiale ale punctelor A,B şi C.

Sistemul nefiind supus la forţe exterioare, ecuaţia de mişcare a centrului de masă va fi $M\ddot{\vec{\rho}} = \vec{0}$, deci $\vec{\rho} = \vec{C}_1 t + \vec{C}_2$, iar traiectoria lui O este, în general, o dreaptă.

b) Pentru ca acest centru O să rămînă imobil e necesar şi suficient să avem $\dot{\vec{\rho}}(0) = \vec{0}$; asta înseamnă ca să avem $\vec{v}_A(0) + \vec{v}_B(0) + \vec{v}_C(0) = \vec{0}$, adică cu vectorii viteze iniţiale să putem construi un triunghi.

Studiul mişcării punctului A:

Fie λ^2 factorul de proporţionalitate pentru forţele de atracţie.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Atunci A este supus forţelor: $\vec{F}_1 = \lambda^2 . \vec{AB}$ şi $\vec{F}_2 = \lambda^2 \vec{AC}$;

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \lambda^2 \vec{AD}$.

Această rezultantă trece prin punctul fix O, pentru care AO = 2 OA' sau AD = 3 AO.

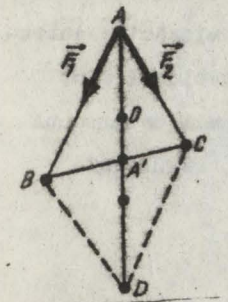


Fig.4.84.

Deci $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (3\lambda^2).\vec{AO}$

Deci A este atras de O cu o forţă proporţională cu distanţa.

Se ştie că într-o asemenea situaţie mişcarea se efectuează pe o elipsă de centru O situată în planul determinat de $(\vec{AO})_0 + \vec{v}_A(0)$.

Un raţionament asemănător ne arată că şi B şi C descriu elipse având centrul în O, toate în acelaşi plan, paralel cu planul vitezelor iniţiale.

Aceste elipse sînt parcurse după legea ariilor.

Factorul de proporţionalitate este $3\lambda^2$.

Deci durata unei revoluţii este $\frac{2\pi}{\lambda\sqrt{3}}$

c,d) Pentru ca, în ipoteza O fix, triunghiul ABC să păstreze o mărime invariabilă, trebuie ca medianele sale să fie constante şi deci $AO = \frac{2}{3} m_a$, $BO = \frac{2}{3} m_b$, $CO = \frac{2}{3} m_c$ să rămînă constante.

Rezultă că A, B, C trebuie să descrie cercuri de centru O.

Legea ariilor ne arată atunci că mişcarea este uniformă şi că viteza unghiulară este $\omega = \lambda\sqrt{3}$.

Se ştie că pentru ca A să descrie o traiectorie circulară, trebuie ca să avem

i) $\vec{v}_A \perp \vec{OA}$

ii) $v_A = \lambda . OA . \sqrt{3}$.

Deci $\vec{v}_A$ trebuie să fie în planul triunghiului ABC.

Avem condiţii analoage şi pentru B şi pentru C.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

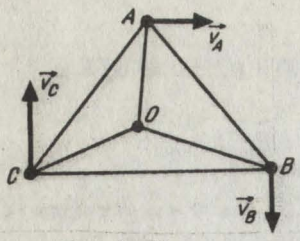


Fig.4.85.

Cum $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$, rezultă să relaţia $\vec{v}_A + \vec{v}_B + \vec{v}_C = \overline{0}$ este verificată de la sine (vedeţi fig.4.85.)

2.a) Mijlocul O al lui MM' este centrul de greutate al sistemului format din cele două inele. Aplicăm teorema mişcării centrului de greutate. Forţele exterioare sînt reacţiunile normale $\vec{N}$ şi $\vec{N}'$ ale celor două tije. Din raţiuni de simetrie $\vec{N}$ şi $\vec{N}'$ formează un cuplu, rezultanta forţelor exterioare fiind nulă.

Deci $M\ddot{\vec{\rho}} = \overline{0}$, O mişcîndu-se rectiliniu şi uniform Ca el să rămînă imobil, trebuie ca viteza lui iniţială să fie zero. Luăm paralela la T şi T' prin O drept axă Ox.

Atunci O rămîne pe această axă.

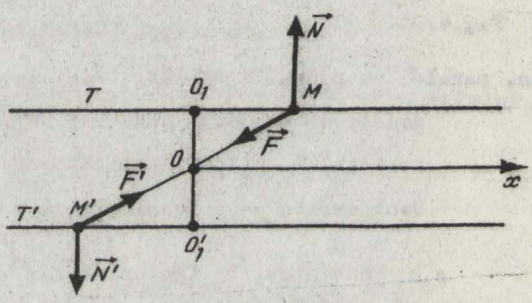


Fig.4.86.

Fie x_1 abscisa lui M şi x_2 cea a lui M' la momentul t.

Centrul de greutate are abscisa $\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Scriind că cdg are viteza iniţială nulă, avem

$$(\frac{dx_1}{dt})_0 = -(\frac{dx_2}{dt})_0$$

Deci şi vitezele iniţiale trebuie să formeze un "cuplu".

b) Mijlocul O fiind imobil, îl alegem ca origine a axei x - ilor.

Să studiem mişcarea lui M faţă de O.

Dreapta MM' trecînd constant prin O, punctul M e acţionat de o forţă centrală de formă $\vec{F} = m\omega^2 \cdot \overline{MO}$.

Pe axa Ox, această forţă are componenta $-m\omega^2 x$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Ecuaţia de mişcare a punctului M în proiecţie pe Ox este:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Deci M are pe tija T o mişcare oscilatorie simplă, în jurul lui $O_1 = \mathrm{Pr}_T O$. Mişcarea lui M' pe tija T' este asemănătoare cu cea a lui M pe tija T.

149. 1) Masele particulelor P_1 şi P_2 fiind egale, centrul de greutate C se va afla în permanenţă pe axa Ox, la egală distanţă de P_1 şi P_2. Sistemul are două grade de libertate.

Poziţia punctelor e perfect determinată dacă vom cunoaşte numerele $OC = x$ şi $CP_1' = \xi$.

Asupra lui P_1 acţionează forţele $m\vec{g}$, $\vec{R}_1$ şi $\vec{F}_{12}$, iar

asupra lui P_2 " " $m\vec{g}$, $\vec{R}_2$ şi $\vec{F}_{21}$.

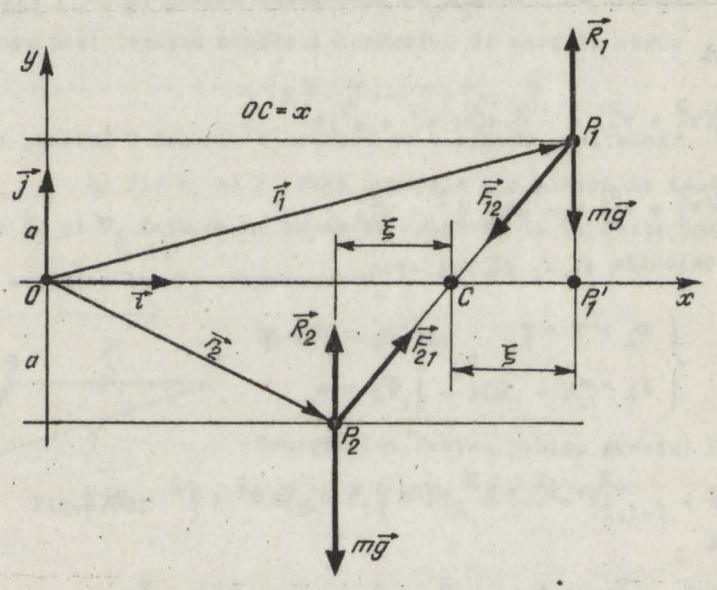


Fig.4.87.

Din cauză că nu există frecare, avem $\vec{R}_1, \vec{R}_2 \parallel \vec{J}$.

Conform ipotezei avem $F_{12} = F_{21} = kP_1P_2$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

a) Teorema mişcării centrului de greutate ne dă

$$(2m)\ddot{\vec{\rho}} = 2m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$

In proiecţii pe axe această ecuaţie ne conduce la

$$\begin{cases} 2m\ddot{x} = 0 \\ 0 = -2mg + R_1 + R_2 \end{cases} ; \quad x = x_0 + \dot{x}_0 t \ ,$$

deci punctul C de pe axa Ox are o mişcare uniformă.

b) Pentru a găsi mişcarea punctelor P_1 şi P_2 ale sistemului faţă de centrul de greutate C, aplicăm teorema energiei, ea se scrie

$$d\left[\frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2)\right] = \vec{F}_{12}d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}d\vec{r}_2$$

fiindcă celelate forţe, fiind perpendiculare pe deplasări, nu dau lucru mecanic.

Dar $\vec{F}_{12} = -kP_1P_2 \cdot \frac{\overrightarrow{P_2P_1}}{P_2P_1} = -k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = k(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{21}$.

Deci

$$d\,\frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2) = -\frac{k}{2}\,d(4(\xi^2 + a^2))$$

sau

$$d\,\frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2) = -2kd(\xi^2 + a^2)$$

Să calculăm şi v_1 şi v_2; avem

$$P_1 \begin{cases} x_1 = x + \xi \\ y_1 = a \end{cases} \qquad P_2 \begin{cases} x_2 = x - \xi \\ y_2 = -a \end{cases}$$

respectiv

$$v_1^2 = \dot{x}^2 + \dot{\xi}^2 + 2\dot{x}\dot{\xi} \ ; \quad v_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{\xi}^2 - 2\dot{x}\dot{\xi}.$$

Deci

$$d(m(\dot{x}^2 + \dot{\xi}^2)) = 2\,kd(\xi^2 + a^2) \quad \text{sau}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{\xi}^2 = -\frac{2k}{m}(\xi^2 + a^2) + C_1.$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Dar $\dot{x} = \dot{x}_0$ = constant şi astfel putem scrie

$$\dot{\xi}^2 = C_2 - \frac{2k}{m}\xi^2 \quad \text{sau} \quad \dot{\xi}^2 = \omega^2(\ell^2 - \xi^2). \tag{1}$$

De aici rezultă că numărul ξ e cuprins între $-\ell$ şi ℓ. De altfel din (1) găsim:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}} = \pm\omega dt \quad \text{sau} \quad \xi = \ell \sin(\pm\omega t + C_3). \tag{2}$$

Dacă se dau ξ_0 şi $\dot{\xi}_0$, atunci (2) se mai scrie

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{\xi}_0}{\omega}\sin(\omega t), \quad t \geq 0$$

Cunoscînd pe x şi ξ, cunoaştem mişcările lui P_1 şi P_2.

2) a) Asupra sistemului de puncte nu lucrează forţe exterioare; deci teorema mişcării centrului de masă se scrie

$$M\ddot{\bar{\rho}} = \bar{0} \longrightarrow \bar{\rho} = \dot{\bar{\rho}}_0 t + \bar{\rho}_0,$$

adică punctul C descrie o dreaptă cu o mişcare uniformă.

b) Fie P_i şi P_j două punctele din sistem de vectori de poziţie $\bar{r}_i$ şi $\bar{r}_j$ faţă de un reper cu originea în O. Forţa interioară $\bar{F}_{ij}$ este acţiunea lui P_j asupra lui P_i

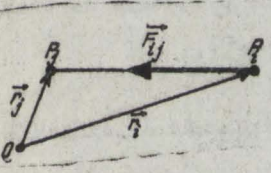


Fig.4.88.

şi are expresia

$$\bar{F}_{ij} = k(\bar{r}_j - \bar{r}_i)$$

Ecuaţia lui Newton pentru punctul P_i se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_{i1} + \bar{F}_{i2} + \ldots + \bar{F}_{i,i-1} + \bar{F}_{i,i+1} + \ldots + \bar{F}_{in}$$

sau

$$m\ddot{\bar{r}}_i = k(\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \ldots + \bar{r}_{i-1} + \bar{r}_{i+1} + \ldots + \bar{r}_n) - k(n-1)\bar{r}_i.$$

Adunăm şi scădem pe $k\bar{r}_i$ în membrul II şi găsim

$$m\ddot{\bar{r}}_i = k(\bar{r}_1 + \ldots + \bar{r}_n) - kn\bar{r}_i;$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Dar $M\vec{\rho} = \sum m\vec{r}_j$ sau $nm\vec{\rho} = m\sum\vec{r}_j$ sau $n\vec{\rho} = \sum\vec{r}_j$;

Deci

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{nk}{m}(\vec{\rho} - \vec{r}_i). \qquad (1)$$

Această relaţie ne dă răspunsul la b), fiindcă

$$\vec{\rho} - \vec{r}_i = \overrightarrow{P_iC}.$$

c) A cunoaşte mişcarea relativă a sistemului faţă de centrul de masă C, înseamnă a cunoaşte expresia vectorului $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{\rho}$, care este vectorul de poziţie al lui P_i faţă de C.

In conformitate cu figura alăturată, putem scrie

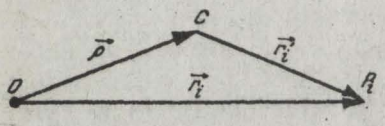


Fig.4.89.

$$\vec{r}_i' = \overrightarrow{CP_i}$$

Dacă $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{\rho}$, atunci relaţia (1) devine

$$\ddot{\vec{r}}_i' + \ddot{\vec{\rho}} = -\frac{nk}{m}\vec{r}_i'.$$

Insă $\ddot{\vec{\rho}} = \vec{0}$, aşa că $\ddot{\vec{r}}_i' = -\frac{nk}{m}\cdot\vec{r}_i'$ sau $\ddot{\vec{r}}_i' + \omega^2\vec{r}_i' = \vec{0}$, $\omega^2 = \frac{nk}{m}$.

De aici găsim:

$$\vec{r}_i' = (\vec{r}_{i_0}')\cos\omega t + \left(\frac{\dot{\vec{r}}_i'}{\omega}\right)_0 \sin\omega t; \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

Relaţia (2) ne arată că traiectoriile punctelor sistemului sînt elipse cu centrul în C, planul lor fiind animat de o mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă (translaţia punctului C).

§ 4.1o. Dinamica unor puncte materiale supuse la legături

4.1o.1. Probleme

15o. 1) Un punct $N(x_1,y_1)$ se mişcă pe dreapta de ecuaţie $y_1 = \frac{9}{\sqrt{1o}}$, după legea $x_1 = -5\sqrt{2}\cos 3t$, $t \in I$.

a) Să se afle în funcţie de t coordonatele unui punct material $M(x,y)$ de masă 5, atras de N cu forţa 2o $\overline{MN}$. La momentul $t = 0$, punctul M pleacă din punctul $(4\sqrt{2}, -\frac{9}{\sqrt{2}})$, fără viteză iniţială.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

b) Se cere ecuaţia carteziană a traiectoriei lui M precum şi volumul născut de bucla închisă a traiectoriei, prin rotirea acesteia în jurul lui Oy.

c) Un punct P din spaţiu se proiectează în fiecare moment în punctul N, iar proiecţia vitezei lui pe Oz este numeric egală cu suma proiecţiilor acceleraţiei aceluiaşi punct P pe cele trei axe de coordonate. Se cere traiectoria punctului P.

2) Un punct material P de masă m se mişcă pe suprafaţa interioară a unui cilindru de rază a, perfect luciu, iar viteza sa iniţială $\vec{V}_0$ face un unghi α cu planul orizontal. Care sînt ecuaţiile de mişcare ale punctului, dacă la t = 0 punctul se afla pe axa Ox?

Să se afle presiunea exercitată de punct pe cilindru.

3) Un corp mic M de masă m alunecă, fără frecare şi fără viteză iniţială, din punctul N cel mai înalt al unei sfere lucii de rază a, pe un meridian. La ce distanţă, măsurată din N, către centrul sferei, pe diametrul sferei care trece prin N, corpul se desprinde de sferă?

4) (Sfera morţii). Un motociclist cu maşina sa cîntăreşte 120 kg. Motociclistul pe maşina sa evoluează în interiorul unei "sfere a morţii" şi centrul său de greutate C (al său şi al motocicletei) poate descrie un cerc mare vertical, avînd raza sa egală cu raza sferei r = 6,30 m.

a) In ipoteză că punctul (motociclistul) C descrie un asemenea cerc vertical Γ al sferei, cu ce viteză minimă trebuie să abordeze polul superior N al traiectoriei, pentru a nu părăsi această traiectorie?

b) Trebuie modificată viteza precedentă, dacă motociclistul mai ia un pasager cu el pe motocicletă?

c) Se poate mişca motociclistul pe cercul ecuatorial al sferei?

Cda. 236/987 Fasc. 20

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

4.1o.2. Rezolvarea problemelor

15o. 1) a) Avem imediat $2e \cdot \overrightarrow{MN} = -2e(x + 5\sqrt{2}\cos 3t)\vec{i} + 2e\left(\frac{9\sqrt{2}}{2} - y\right)\vec{j}$. Ecuaţia de mişcare $m\vec{a} = 2e \cdot \overrightarrow{MN}$, proiectată pe axe, ne conduce la:

$$\begin{cases} 5\ddot{x} = -2e\,x - 10e\sqrt{2}\cos 3t, \; x(0) = 4\sqrt{2}, \; \dot{x}(0) = 0 \\ 5\ddot{y} = -2e\,y + \frac{18e}{2}\sqrt{2}, \; y(0) = -\frac{9\sqrt{2}}{2}; \; \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4x = -2e\sqrt{2}\cos 3t \\ \ddot{y} + 4y = 18\sqrt{2}. \end{cases}$$

Integrînd aceste ed şi folosind condiţiile iniţiale găsim:

$$\begin{cases} x(t) = 4\sqrt{2}\cos 3t \\ y(t) = \frac{9}{\sqrt{2}}(1-2\cos 3t), \; t \geq 0. \end{cases}$$

b) Dacă eliminăm timpul între ecuaţiile precedente, obţinem ecuaţia carteziană a traiectoriei

$$\frac{81\,x^2}{16\,y^2} = \frac{27 - \sqrt{2}y}{9}, \qquad (1)$$

care este ecuaţiei unei cubice.

Curba definită de (1) se construieşte uşor, dar numai o parte a ei este descrisă de punctul $M(x,y)$, $-4\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}$ şi $-\frac{9\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{27\sqrt{2}}{2}$.

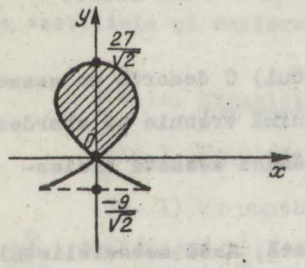


Fig.4.9e.

Acum $V = \pi\int_0^{27/\sqrt{2}} x^2 dy = \pi\sqrt{2} \cdot 3^5$ u.v.

c) Fie x_1, y_1, z_1 coordonatele lui P.

Conform enunţului trebuie să avem:

$$\begin{cases} x_1 = -5\sqrt{2}\cos(3t) \\ y_1 = \frac{9}{\sqrt{2}} \\ z_1 = z_1 \end{cases} ; \; z_1' = x_1'' + y_1'' + z_1''$$

Rezultă ed pentru $z_1(t)$:

$$z_1'' - z_1' = -45\sqrt{2}\cos(3t)$$

cu soluţia generală

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$z_1(t) = z_0 - z_0' + (z_0' - \frac{9}{\sqrt{2}})e^t + \frac{3}{\sqrt{2}}(3\cos 3t + \sin 3t), \quad t \geq 0,$$

unde z_0 şi z_0' sînt condiţiile iniţiale verificate de $z_1(t)$.

2) Asupra punctului acţionează forţele $m\vec{g}$ şi reacţiunea cilindrului $\vec{R}$. Ecuaţia de mişcare se scrie

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} \qquad (1)$$

şi ei trebuie să-i asociem condiţiile iniţiale: $x(0) = a$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = v_0 \cos\alpha$, $v_z(0) = v_0 \sin\alpha$.

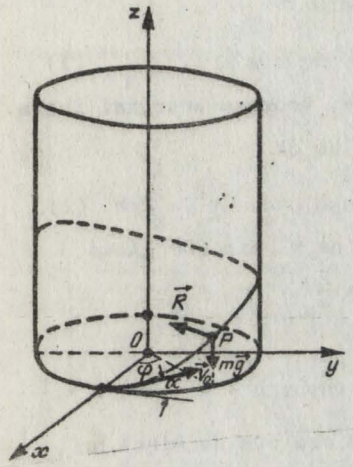


Fig.4.91.

Scriem ecuaţia (1) în coordonatele cilindrice:

$$\begin{cases} ma_\rho = F_\rho \\ ma_\varepsilon = F_\varepsilon \\ ma_z = F_z \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} -ma\dot{\varphi}^2 = -R \\ \frac{1}{a}\frac{d}{dt}(a^2\dot{\varphi}) = 0 \\ m\ddot{z} = -mg. \end{cases}$$

Ecuaţia a II-a ne dă $a^2\dot{\varphi} = C$ sau $a(a\dot{\varphi}) = C$ (1). Pe C îl determinăm dacă folosim condiţiile iniţiale şi anume la $t = 0$ avem $v_\rho = 0$; $v_\varepsilon = v_0\cos\alpha$, $v_z = v_0 \sin\alpha$

Găsim $C = v_0 a \cos\alpha$ şi (1) se mai scrie

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0\cos\alpha}{a}, \text{ respectiv } \varphi(t) = C_1 + \frac{v_0\cos\alpha}{a} \cdot t.$$

Integrăm şi ecuaţia $z'' = -g$ şi găsim $z(t) = tv_0\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$.

Aşadar ecuaţiile parametrice ale traiectoriei vor fi

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot \cos\varphi(t) \\ y(t) = a \cdot \sin\varphi(t) \\ z(t) = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2; t \geq 0; \varphi(t) = C_1 + \frac{v_0\cos\alpha}{2}t \end{cases}$$

Apăsarea $\vec{R}'$ exercitată de punct asupra cilindrului va fi dirijată în sens contrar faţă de $\vec{R}$, dar va avea acelaşi modul ca şi $\vec{R}$. Deci

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$R' = ma\dot{\varphi}^2 = m \cdot \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{a}.$$

3) Scriem ecuaţia de mişcare pentru M şi anume $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$, $\vec{R}$ fiind reacţiunea sferei asupra lui M.

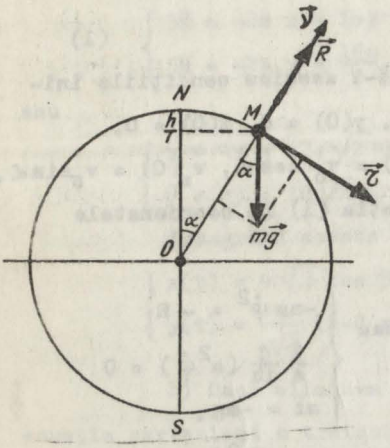


Fig.4.92.

Proiectăm această ecuaţie pe normala la sferă în punctul M şi punem condiţia $\vec{R} = \vec{0}$. Găsim

$$\frac{mv^2}{a} = mg\cos\alpha; \qquad (1)$$

pe de altă parte, teorema energiei între punctele N şi M ne dă

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \quad \text{sau} \quad v^2 = 2gh. \qquad (2)$$

Inlocuind în (1) pe v^2 din (2), găsim

$$\cos\alpha = \frac{2h}{a}$$

Apoi

$$h = a - a\cos\alpha; \; h = a - 2h; \; h = \frac{a}{3}.$$

4) a) Centrul de greutate C se mişcă aşa cum se mişcă un simplu punct material de masă m = 120 kg, supus forţelor exterioare respective.

Considerăm frecările nule. Reacţiunea $\vec{R}$ este normală la sferă. Deci legea de mişcare este:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}.$$

În punctul N reacţiunea este dirijată în jos. $\vec{R}$ are caracter centripet. Acceleraţia este dirijată în jos şi avem

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$, unde

$a = \frac{v^2}{r}$, fiindcă acceleraţia are o singură componentă în acest punct; cererea $R \geqslant 0$ ne dă

$$R = ma - mg = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right) \geqslant 0.$$

Deci va trebui să avem $\frac{v^2}{r} \geqslant g$. Rezultă astfel viteza minimă cu care motociclistul trebuie să abordeze polul nord N:

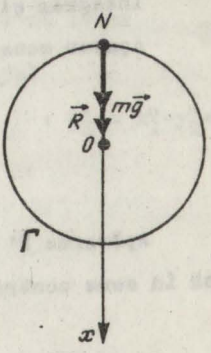


Fig.4.93.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$v_{minim} = \sqrt{rg} = \sqrt{6,3.9,8} = 7,85 \text{ m/s}.$$

In orice caz $v \geq \sqrt{rg}$.

b) Viteza limită nu conţine masa sistemului.

Dacă prezenţa pasagerului nu modifică sensibil distanţa centrului de greutate pînă la O, centrul sferei, raza r rămînînd constantă atunci v_{min} nu va trebui modificat.

c) Acceleraţia lui C este $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_\gamma$, unde

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{şi} \quad a_\gamma = \frac{v^2}{r},$$

ambele componente fiind situate în planul ecuatorial, evident un plan orizontal; deci şi $\vec{a}$ şi $m\vec{a}$ se găsesc în acest plan orizontal.

Pe de altă parte $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$. (1)

Evident $\vec{R}$ este şi el în planul ecuatorial, orizontal.

Dar $m\vec{g}$ este situat într-un plan vertical.

Astfel suma $m\vec{g} + \vec{R}$ nu poate fi conţinută în planul ecuatorial, egalitatea (1) nu poate avea loc şi motociclistul nu poate evolua pe ecuator.

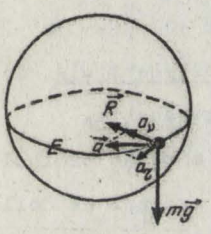


Fig.4.94.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

ANEXA MATEMATICA

I. Ecuaţii diferenţiale

I. 1. Generalităţi

Definiţie. Se numeşte **ecuaţie diferenţială** obişnuită cu o funcţie necunoscută y o relaţie de forma

$$F(x,y(x), y'(x) \dots y^{(n)}(x)) = 0, \qquad (1)$$

sau de forma

$$y^{(n)}(x) = f(x,y(x), y'(x),\dots,y^{(n-1)}(x)) \qquad (2)$$

între variabila independentă x, funcţia necunoscută y(x) şi derivatele acesteia pînă la un anumit ordin n, unde $F:\Delta \subset \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$, respectiv $f:J \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sînt funcţii continue.

Exemple de ecuaţii diferenţiale: $y'(x).y(x) = 0$; $y'(x) + \omega^2 y(x) = 0$; $L\frac{di}{dt} + Ri = E$; $y'' - 3y' + y = 0$; $(x+2)y'' - (x-5)y' - 7y = 0$.

Definiţie. Se numeşte **ordin al ecuaţiei diferenţiale** (1) ordinul cel mai înalt al derivatei lui y care intră în ecuaţie.

Exemple: Ecuaţia diferenţială $y' - y = 0$ este de ordinul întîi, iar ecuaţia $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ este de ordinul al doilea.

Definiţie. Se numeşte **soluţie** a ecuaţiei (2) o funcţie $\varphi: I \subset J \longrightarrow \mathbb{R}$, cu derivatele $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$,..., $\varphi^{(n)}(x)$ continue pe I, care înlocuită în relaţia (2) o transformă pe aceasta într-o identitate în $x \in I$:

$$\forall x \in I,\ \varphi^{(n)}(x) = f(x,\varphi'(x), \varphi''(x),\dots,\varphi^{(n-1)}(x)).$$

Exemplu: Funcţia $\varphi:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^x$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale $y' - y = 0$, fiindcă înlocuită în ecuaţie ne dă $e^x - e^x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Problema lui Cauchy pentru ecuaţia (2): A rezolva problema lui Cauchy pentru ecuaţia (2) înseamnă a determina o soluţie $\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

a ecuației care îndeplinește condițiile (inițiale)

$$\varphi(x_0) = y_0$$
$$\varphi'(x_0) = y_0', \quad x_0 \in J, \quad (y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$$
$$\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Exemplu de problemă Cauchy. Să se determine o soluție $\varphi : [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ a ecuației $y'(x) - y(x) = 0$, care îndeplinește condiția: $y(2) = 2$. Se găsește $\varphi(x) = 2e^{x-2}$, $\varphi : [1,3] \longrightarrow [2e^{-1}, 2e]$.

Observație. În rezolvarea problemelor lui Cauchy pentru o ecuație diferențială, fundamentale sînt următoarele chestiuni:

1) Demonstrarea existenței locale sau globale a soluției;

2) Determinarea intervalului pe care există soluția.

3) Demonstrarea unicității soluției.

4) Dependența soluției de condițiile inițiale.

Pentru ecuațiile diferențiale elementare considerate în cele ce urmează mai jos, aceste chestiuni se rezolvă ușor (constructiv), pe baza cunoștințelor de analiză matematică.

I.2. Exemple de tipuri de ecuații diferențiale simple

1. $y'(x) = f(x)$, $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I interval, f continuă.

2. $y'(x) = f(x)y(x)$, $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f continuă (ecuație liniară)

3. $y'(x) = ay(x) + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ (ecuație afină cu coeficienți constanți).

4. $y'(x) = f(x).g(y)$, $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f continuă, $g : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall y \in J$, $g(y) \neq 0$, g continuă (ecuație cu variabilele separabile).

5. $a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0$; $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ (ecuație liniară de ordinul al II-lea cu coeficienți constanți).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

I.3. Mulţimea soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale şi soluţia problemei lui Cauchy pentru aceste ecuaţii

Nr. crt. / Tipul ecuaţiei	Ecuaţia diferenţială	Mulţimea soluţiilor sau soluţia generală	Datele iniţiale	Soluţia problemei Cauchy
0 / 1	2	3	4	5
1 Ecuaţie cu variabilele separate	$y'=f(x)$, $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ f continuă	$y(x)=\int f(x)dx+C$, $x\in I$ $C\in\mathbb{R}$	$y(x_0)=y_0$ $x_0\in I, y_0\in\mathbb{R}$	$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t)dt$, $x\in I$
	Exemplu: $y'=\sin x$ $\sin:\mathbb{R}\longrightarrow[-1,1]$	$y(x)=-\cos x+C$, $x\in\mathbb{R}$ $C\in\mathbb{R}$	$y(0)=1$	$\varphi(x)=2-\cos x$, $x\in\mathbb{R}$
2 Ecuaţie cu variabilele separabile	$y'=g(y)$, $g:J\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ g continuă	$\int\frac{dy}{g(y)}-x=C$, $x\in I$ $C\in\mathbb{R}$	$y(x_0)=y_0$ $x_0\in I$, $y_0\in J$	$x=x_0+\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{g(t)}$, $y:I\longrightarrow J$
	Exemplu: $y'=1+y^2$ $y:I\longrightarrow\mathbb{R}$	$\operatorname{arctg} y(x)=x+C$, $x\in I$ $C\in\mathbb{R}$	$y(0)=0$	$\varphi(x)=\operatorname{tang} x$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
3 Ecuaţie cu variabilele separabile	$y'=f(x).g(y)$, $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ $g:J\longrightarrow\mathbb{R}\setminus\{0\}$, continue	$\int f(x)dx+C=\int\frac{dy}{g(y)}$, $x\in I_1\subset I$	$x_0\in I_1$, $y_0\in J$	$\int_{x_0}^{x} f(t)dt=$ $=\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{g(s)}$, $x\in I_1\subset I$ $y\in J$
	Exemplu: $y'=-\frac{1+y^2}{y}\sin x$ $g(y)=\frac{1+y^2}{y}$, $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=-\sin x$, $f:I\to[-1,1]$	$\ln(1+y^2)=2\cos x+C$	$y(0)=1$	$\varphi(x)=\sqrt{2.e^{2\cos x-2}-1}$ $\lvert x\rvert\leq 2.\arcsin(\frac{\sqrt{\ln 2}}{2})$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

0	1	2	3	4	5
4	Ecuaţie liniară	$y'+P(x)y=0$, $P:I\to\mathbb{R}$, continuă	$y(x)=C\cdot e^{-\int P(x)dx}$, $x\in I$, $C\in\mathbb{R}$	$y(x_0)=y_0$, $x_0\in I$, $y_0\in\mathbb{R}$	$y(x)=y(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}P(s)ds}$, $x\in I$.
		Exemplu: $y'+\frac{1}{x-2}y=0$, $x\in(2,+\infty)$	$y(x-2)=C$	$x_0=3$; $y_0=5$	$(x)=\frac{5}{x-2}$, $x\in(2,+\infty)$
5	Ecuaţie afină cu coeficienţi constanţi	$y'=ay+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq0$ $y:I\to J; y\neq-\frac{b}{a}$, $\forall x\in I$	$y(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$, $x\in I$ $C\in\mathbb{R}$	$y(x_0)=y_0$ $x_0\in I, y_0\in J$	$y(x)=(y_0+\frac{b}{a})e^{a(x-x_0)}-\frac{b}{a}$, $y:I\to J$
		Exemplu: $y'=y-2$	$y(x)=2+Ce^x$	$y(0)=3$	$\varphi(x)=2+e^x$, $x\in\mathbb{R}$
6	Ecuaţie de ordin superior normală	$y''=f(x)$, $f:I\to\mathbb{R}$, continuă	$y(x)=\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)dt+$ $+C_1x+C_2$; $x,x_0\in I$; $C_1,C_2\in\mathbb{R}$	$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, $x_0\in I, y_0$, $y_0'\in\mathbb{R}$	$y(x)=\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)dt+$ $+y_0'(x-x_0)+y_0$
		Exemplu: $y''=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\arcsin:(-1,1)\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$y(x)=\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x+$ $+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C_1x+C_2$ $x\in(-1,1)$; $C_1,C_2\in\mathbb{R}$	$y(0)=0$ $y'(0)=0$	$\varphi(x)=\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x+$ $+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1,1)$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

0	1	2	3	4	5
7	Ecuația diferențială a oscilațiilor armonice	$y''+w^2y=0$; $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$y(x)=C_1\sin(wx)+C_2\cos(wx)$ $C_1,C_2\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$	$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=$ $=y'_0$ $x_0,y_0,y'_0\in\mathbb{R}$	$y(x)=y_0\cos w(x-x_0)+$ $+\frac{y'_0}{w}\sin w(x-x_0)$, $x\in\mathbb{R}$
		Exemplu: $y''+17y=0$;	$y(x)=C_1\sin\sqrt{17}x+$ $+C_2\cos\sqrt{17}x$, $x\in\mathbb{R}$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$	$x_0=0$, $y_0=1$, $y'_0=\sqrt{17}$	$\varphi(x)=\cos\sqrt{17}x+\sin\sqrt{17}x$ $x\in\mathbb{R}$
8	Ecuație liniară de ordinul al doilea cu coeficienți constanți Cazul rădăcinilor distincte	$ay''+by'+cy=0$ $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $a,b,c\in\mathbb{R}$ $ar^2+br+c=0$, $\Delta>0$; $r_1\neq r_2$	$y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$, $x\in\mathbb{R}$; $C_1,C_2\in\mathbb{R}$	$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, $x_0,y_0,y'_0\in\mathbb{R}$	$y(x)=\frac{r_2y_0-y'_0}{r_2-r_1}e^{(x-x_0)r_1}+$ $+\frac{y'_0-r_1y_0}{r_2-r_1}e^{(x-x_0)r_2}$ $x\in\mathbb{R}$
		Exemplu: $3y''-2y'-$ $-8y=0$ $3r^2-2r-8=0$ $r_1=2$, $r_2=-\frac{4}{3}$	$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$, $x\in\mathbb{R}$ $y\in\mathbb{R}$, C_1, $C_2\in\mathbb{R}$	$x_0=0$, $y_0=1$; $y'_0=0$	$\varphi(x)=\frac{2}{5}e^{2x}+\frac{3}{5}e^{-\frac{4}{3}x}$ $x\in\mathbb{R}$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

0	1	2	3	4	5
9	Ecuația liniară de ordinul al doilea cu coeficienți constanți. Cazul rădăcinilor duble.	$ay''+by'+cy=0$; $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $a,b,c\in\mathbb{R}$ $ar^2+br+c=0$ cu $\Delta=0$, $r_1=r_2=r$	$y(x)=(C_1x+C_2)e^{rx}$, $x\in\mathbb{R}$ $C_1,C_2\in\mathbb{R}$	$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$ $x_0,y_0,y'_0\in\mathbb{R}$	$y(x)=\left[(y'_0-ry_0)x+y_0+\right.$ $\left.+rx_0y_0-x_0\right]y'_0\cdot e^{r(x-x_0)}$ $x\in\mathbb{R}$
		Exemplu: $y''+2y'+y=0$ $r^2+2r+1=0$ $r_1=r_2=-1$	$y(x)=(C_1x+C_2)e^{-x}$ $x\in\mathbb{R}$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$	$x_0=0$ $y_0=0$ $y'_0=1$;	$\varphi(x)=xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$
10	Ecuația liniară cu coeficienți constanți. Cazul rădăcinilor complexe	$ay''+by'+cy=0$ $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $a,b,c\in\mathbb{R}$ $ar^2+br+c=0$, $\Delta<0$; $r_1=\alpha-i\beta$, $r_2=\alpha+i\beta$	$y(x)=(C_1\sin\beta x+$ $+C_2\cos\beta x))\cdot e^{\alpha x}$, $x\in\mathbb{R}$ $C_1,C_2\in\mathbb{R}$	$y(x_0)=y_0$ $y'(x_0)=y'_0$ $x_0,y_0,y'_0\in\mathbb{R}$	$y(x)=\left[\frac{y'_0-\alpha y_0}{\beta}\sin\beta(x-x_0)+\right.$ $\left.+y_0\cos(x-x_0)\right]e^{(x-x_0)}$, $x\in\mathbb{R}$
		Exemplu: $y''+2y'+2y=0$ $r^2+2r+2=0$ $r_1=-1-i$, $r_2=-1+i$, $\alpha=-1$; $\beta=1$.	$y(x)=e^{-x}(C_1\sin x+$ $+C_2\cos x)$ $x\in\mathbb{R}$; $C_1,C_2\in\mathbb{R}$	$x_0=0$ $y_0=1$ $y'_0=0$	$\varphi(x)=(\sin x+\cos x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

I.4. Alte tipuri de ed întîlnite în rezolvarea unor probleme de mecanică şi soluţiilor lor generale sau ale problemei Cauchy

Nr. crt.	Tipul ecuaţiei diferenţiale	Ecuaţia diferenţială	Soluţia generală	Datele iniţiale sau Datele problemei Cauchy	Soluţia problemei Cauchy
o	1	2	3	4	5
1	Ed. care conţine doar pe y" şi y	$y''=f(y)$, f continuă $2y'y''=2f(y)y' \Longrightarrow$ $y'^2=2\int f(y)dy+C_1 \Longrightarrow$ $y' = \pm\sqrt{C_1+2\int f(y)dy} \Longrightarrow$ $\int \frac{dy}{\sqrt{C_1+2\int f(y)dy}}=\pm x+C_2$	$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1+2\int f(y)dy}} =$ $= \pm x+C_2$	$x_o, y(x_o)=y_o$ şi $y'(x_o)=y'_o$	
	Exemplu	$m\ddot{x} = ax-cx^3$		$x(o)=\sqrt{\frac{2a}{c}}$, $\dot{x}(0)=0$	$x(t)=\sqrt{\frac{2a}{c}} \cdot$ $\cdot \frac{1}{ch(\sqrt{\frac{a}{m}}\, t)}$, $t\geq 0$
2	Ed. liniară şi neomogenă sau afină	$y'+P(x)y=Q(x)$, $P,Q:I\longrightarrow\mathbb{R}$ continue 1. Integrăm $\overline{y}'+P(x)\overline{y}=0$ 2. Căutăm o soluţie a ed date cu metoda lui Lagrange $y_p(x)=C(x)\overline{y}(x)$	$y(x)=\overline{y}(x)+$ $+ y_p(x)$ $x\in I$	$x_o, y(x_o)=y_o$	$y(x)=y_o e^{-\int_{x_o}^{x} P(s)ds} +$ $+\int_{x_o}^{x} Q(t)e^{\int_{x}^{t} P(s)ds} dt$ $x_o, x\in I$, $y_o\in\mathbb{R}$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

3	Ed.a oscilaţiilor armonice cu termen constant în dreapta semnului egal	$y''+\omega^2 y=b$ $\omega, b \in R$	$y(x)=\bar{y}(x)+y_p(x)$, cu $\bar{y}(x)=C_1\cos\omega x+ C_2\sin\omega x$, $y_p(x) = \frac{b}{\omega^2}$	$x_0, y(x_0)=y_0$ şi $y'(x_0)=y_0'$	$y(x)=(y_0-\frac{b}{\omega^2})\cos\omega(x-x_0)$ $+\frac{b}{\omega^2}+\frac{y_0}{\omega}\sin\omega(x-x_0)$
4	Ed.a oscilaţiilor armonice cu partea dreaptă de forma $b(x)=A\sin px$, $p \neq \omega$	$y''+\omega^2 y =$ $= A\sin(px)$	$y(x)=y(x)+\bar{y}_p(x)$, cu $\bar{y}(x)=C_1.\cos\omega x+$ $+ C_2.\sin\omega x$ şi $y_p(x)=B\sin(px)+C\cos(px)$	$x_0, y(x_0)=y_0$ şi $y'(x_0)=y_0'$	
5	Ed a oscilaţiilor armonice cu partea dreaptă de forma $b(x)=A\sin\omega x$	$y''+\omega^2 y=$ $= A\sin\omega x$	$y(x)=\bar{y}(x)+y_p(x)$, cu $\bar{y}(x)=C_1\cos\omega x +$ $+ C_2\sin\omega x$ şi $y_p(x) = x[B\sin\omega x +$ $+ C\cos\omega x]$	$x_0, y(x_0)=y_0$ şi $y'(x_0)=y_0'$	
6		$y''-\omega^2 y=b$	$y(x)=\bar{y}(x)+y_p(x)$, cu $\bar{y}(x)=C_1\operatorname{ch}\omega x+C_2\operatorname{sh}\omega x$ şi $y_p(x) = -\frac{b}{\omega^2}$	$x_0, y(x_0)=y_0$ şi $y'(x_0)=y_0'$	$y(x)= -\frac{b}{\omega^2}+$ $+(y_0+\frac{b}{\omega^2})\operatorname{ch}\omega(x-x_0)+$ $+\frac{y_0}{\omega}\operatorname{sh}\omega(x-x_0)$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

II. Formule din geometria diferențială a curbelor

1. Raza de curbură a unei curbe plane de clasă C^2 definite prin:

α) $y = f(x)$, $f:I \to \mathbb{R}$; $\rho_c(x) = \dfrac{(1+f'^2(x))^{3/2}}{|f''(x)|}$ (1)

β) $x = x(t), y = y(t)$, $x(\cdot), y(\cdot): I \to \mathbb{R}$; $\rho_c(t) = \dfrac{(x'^2(t)+y'^2(t))^{3/2}}{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}$ (2)

γ) $r = r(\theta)$, $r:I \to \mathbb{R}$; $\rho_c(\theta) = \dfrac{(r^2(\theta) + r'^2(\theta))^{3/2}}{|r^2(\theta) + 2r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta)|}$ (3)

2. Tangenta unghiului V pe care-l face raza vectoare cu tangenta geometrică în punctul (r, θ) la curba plană definită de $r = r(\theta)$, $r:I \to \mathbb{R}$, $r'(\theta) \neq 0$:

$$\operatorname{tg} V = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}. \tag{4}$$

3. Raza de curbură a unei curbe în spațiu, de clasă C^2, definită prin ecuațiile:

α) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in I$

$$\rho_c(t) = \frac{((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + z'(t))^2)^{3/2}}{(A^2+B^2+C^2)^{1/2}} \tag{5}$$

unde

$$A = \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

sau

$$\rho_c(t) = \frac{(\vec{v}\cdot\vec{v})^{3/2}}{|\vec{v}\times\vec{a}|}.$$

β) $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, $s \in J$

$$\rho_c(s) = \frac{1}{\sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2 + (z''(s))^2}} \tag{6}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

4. Raza de torsiune a unei curbe în spaţiu, de clasă C^3, definite prin ecuaţiile:

$\alpha)$ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in I$

$$\rho_t = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix}} \tag{7}$$

sau

$$\rho_t = \frac{(\vec{v} \times \vec{a})^2}{(\vec{v}\ \vec{a}\ \dot{\vec{a}})}$$

5. Versorii triedului lui Frenet într-un punct al unei curbe în spaţiu de clasă $C^2(t)$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{r}'(t)}{r'(t)}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)\ \vec{r}''(t)|}, \quad \vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\varepsilon}$$

6. Formulele lui Frenet pentru un arc de curbă orientată biregulată

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\varepsilon}}{ds} = \dfrac{1}{\rho_c(s)} \cdot \vec{\nu}(s) \\ \dfrac{d\vec{\nu}}{ds} = -\dfrac{1}{\rho_c(s)} \vec{\varepsilon}(s) + \dfrac{1}{\rho_t(s)} \vec{\beta} \\ \dfrac{d\vec{\beta}}{ds} = -\dfrac{1}{\rho_t(s)} \vec{\nu}(s). \end{cases}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

NOTAȚII, PRESCURTĂRI, UNITĂȚI DE MĂSURĂ

a, γ	accelerație
a_τ, a_ν, γ_τ, γ_ν	componentele tangențială și normală ale accelerației
A_1, B_1, C_1	puncte din $\mathbb{R}^n$
A, B, C,	unghiurile unui triunghi; puncte din $\mathbb{R}^n$
$C^k(I)$	mulțimea funcțiilor definite pe I care au derivatele continue pînă la ordinul k inclusiv
C	curbura unei curbe
ρ_c	raza de curbură a unei curbe
D	domeniu
F, P, Q, G	intensități ale unor forțe
g	accelerația gravitațională
G	punctul de intersecție a medianelor unui $\triangle ABC$
h	înălțime
H	ortocentrul unui $\triangle ABC$
I	interval al axei R sau centrul arcului înscris în $\triangle ABC$
J	joule
$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$	versorii axelor unui reper ortogonal din $\mathbb{R}^3$
kg	kilogram
L	arc de curbă; lucru mecanic
m_a, m_b, m_c	lungimile medianelor unui $\triangle ABC$
M	masă a unui punct
m	metru; masă a unui punct
N	newton
N.m	newtonmetru
r	rază vectoare; raza cercului înscris într-un $\triangle ABC$; distanță
O	centrul cercului circumscris $\triangle ABC$; originea reperelor
P	punct
R	rază a unui cerc

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$\mathbb{R}$	axa reală
$\mathbb{R}_+$	mulţimea numerelor reale pozitive sau nule
$\mathbb{R}_+^*$	" " " strict pozitive
S	aria unui $\triangle ABC$; porţiune dintr-o suprafaţă din $\mathbb{R}^3$
s, sec	secundă
T	torsiunea unei curbe din $\mathbb{R}^3$; perioadă
ρ_t	raza de torsiune a unei curbe din $\mathbb{R}^3$
v	modulul vitezei unui punct
V	domeniu din $\mathbb{R}^3$; volum al unui corp; mulţime de vectori
x,y,z	coordonatele unui punct
	• • •
a.î. sau aî	astfel încît
cdg	centru de greutate
cns	(o)condiţie necesară şi suficientă
dşnd	dacă şi numai dacă
e.d. sau ed	ecuaţie diferenţială
i.e. sau ie	id est = adică
PC	problema lui Cauchy (pentru o ed)
pm	produs mixt
ps	produs scalar
pv	produs vectorial
AMM	American Mathematical Monthly
FMF	Facultatea de matematică fizică
GM	Gazeta matematică
OIF	Olimpiada internaţională de fizică
RUM	Revista Universitară Matematică
u.a.	unităţi de arie
u.l.	unităţi de lungime
u.v.	unităţi de volum

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

CONSTANTE FIZICE UTILE

Accelerația normală a greutății (la nivelul mării și la latitudinea de 45°)		9,80665 m/s^2
Accelerația g a greutății la București		9,80551 m/s^2
Constanta gravitațională f		$6,67.10^{-11}$ $\frac{N.m^2}{kg^2}$
Constanta lui Planck h		$6,624.10^{-34}$ J.s
Masa (de repaus) a electronului m_e		$9,1.10^{-31}$ kg
Sarcina electronului e		$1,6.10^{-19}$ C
Viteza luminii în vid c		3.10^8 m/s
Viteza sunetului în aer		331 m/s
Viteza sunetului în apă		1500 m/s
Soarele	Masa Soarelui	2.10^{30} kg
	Distanța Pământ-Soare	150 000 000 km
	Raza Soarelui	696 000 km
	Densitatea medie	1,4 g/cm^3
Pământul	Masa Pământului	$5,974.10^{24}$ kg
	Semiaxa mare	6378,245 km
	Semiaxa mică	6356,863 km
	Densitatea medie	5,5 g/cm^3
	Excentricitatea orbitei eliptice în jurul Soarelui	0,017
Luna	Masa Lunii	$\frac{1}{81} M_p = 7,35.10^{22}$ kg
	Raza Lunii	$1,7.10^6$ m
	Accelerația g_L	$\frac{1}{6} g_p = 1,634$ m/s^2
Prima viteză cosmică		7,9 km/s
A doua viteză cosmică		11,2 km/s

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

BIBLIOGRAFIE

1. P.Appell - Traité de mécanique rationnelle, vol.I, ed. 5, Gauthier-Villars, Paris, 1926
2. A.Beleş şi Şt.Bălan, - Mecanica teoretică şi aplicată, I, Introducere în mecanică, Imprimeria C.F.R., Bucureşti, 1942.
3. Şt.Bălan şi I.Ivanev - Din isteria mecanicii, Editura Ştiinţifică, 1966
4. Şt.Bălan - Culegere de probleme de mecanică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972, 1977.
5. A.Beju, I.Beju - Compendiu de matematică, vol.I, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1983.
6. N.Bobec, I.Colojoară - Elemente de analiză matematică, EDP, Bucureşti, 198o.
7. P.Brădeanu, I.Pop, D.Brădeanu - Probleme şi exerciţii de mecanică teoretică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1979.
8. General St.Burileanu, - Curs de mecanică raţională, vol.I, Cinematica, Atelierele Grafice SOCEC & Co,S.A.R., Bucureşti,1942
9. L.Drageş - Principiile mecanicii analitice, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976.
10. I.Druică-Zeletin, A.Popescu - Probleme de mecanică şi acustică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977
11. M.Gall şi A.Hristev - Probleme la Olimpiadele de fizică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1978.
12. Waldemar Gorzkowski, 25 Lat Olimpiad Fizycznych, Wydawnictwa Szkolne i pedagogiczne, Warszawa, 1979.
13. Dario Graffi - Esercizi di mecanica razionale, Casa Editrice prof. Riccardo Pàtron, Bologna, 1967.
14. M.Gutman - Probleme de calcul vectorial, Editura Tehnică, Bucureşti 1961.
15. A.Halanay - Ecuaţii diferenţiale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.
16. A.Hristev - Mecanica şi Acustica, Centrul de multiplicare al Universităţii din Bucureşti, 1971.
17. A.Hristev - Probleme de fizică date la examene, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.
18. C.Iacob - Elemente de analiză matematică şi mecanică, manual cl.XII reală, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968.
19. C.Iacob - Curs de matematici superioare, Editura Tehnică, Bucureşti 1957.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

20. C.Iacob - Elemente de analiză matematică, EDP, Bucureşti, 1973
21. C.Iacob - Mecanică teoretică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1980.
22. A.G.Ioachimescu - Mecanica raţională (reeditare de Gabriela Ţiţeica) şi Alexandru Stoenescu), Biblioteca Gazetei matematice nr. XXIV, Monitorul oficial şi imprimeriile statului, Imprimeria Naţională, Bucureşti, 1947.
23. Gh.Marinescu - Ecuaţii diferenţiale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
24. Şt.Mirică - Ecuaţii diferenţiale, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1979.
25. H.Mulholland, J.H.G. Phillips - Applied mathematics for advanced level, Butterworths, London, 1969.
26. I.I.Plăcinţeanu - Elemente de calcul vectorial şi tensorial, Tip. "Presa bună", Iaşi, 1941.
27. I.I.Plăcinţeanu - Mecanica raţională şi analitică, Editura Librăriei Ath.D.Gheorghiu, Iaşi, 1942.
28. I.I.Plăcinţeanu - Vectori, potenţiali, tensori, Tip.Gheorghiu, Iaşi
29. I.I. Plăcinţeanu - Mecanica vectorială şi analitică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.
30. I.M.Popescu, G.F.Cone, Gh.A.Stanciu - Culegere de probleme de fizică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.
31. A.Radu - Probleme de mecanică, Centrul de multiplicare al Universităţii "A.I.Cuza", Iaşi, 1975.
32. E.Rogai - Exerciţii şi probleme de ecuaţii diferenţiale şi integrale, Editura Tehnică, Bucureşti, 1965.
33. E.Rogai - Tabele şi formule matematice, Editura tehnică, Bucureşti, 1983,1984.
34. E.Rogai - Ecuaţii diferenţiale: exerciţii şi probleme, Tipografia Universităţii, Bucureşti, 1984.
35. M.Sarian - Mecanica şi rezistenţa materialelor, vol.I,Mecanica, Editura de stat didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1961.
36. M.Sarian şi colab., - Probleme de mecanică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975, 1983.
37. Gh.D.Simionescu - Noţiuni de algebră vectorială şi aplicaţii în geometrie, Editura Tehnică, Bucureşti, 1982.
38. C.Stanciu, Fl. Bădulescu, C.Diaconu, P.Bratu - Mecanică, probleme de staţică, pentru uzul studenţilor, Institutul de Construcţii Bucureşti, 1981.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

39. Al.Stoenescu, Gh.Buzdugan, A.Ripianu, M.Atanasiu - Culegere de probleme de mecanică teoretică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.
40. Al.Stoenescu, Gh.Silaş - Curs de mecanică teoretică, Editura Tehnică Bucureşti, 1957, 1959.
41. N.Teodorescu - Calcul vectorial, Editura Institutului Politehnic, Bucureşti, 1951.
42. P.P.Teodorescu - Mecanica teoretică, Anexă, Centrul de multiplicare al Universităţii din Bucureşti, 1973.
43. P.P.Teodorescu - Sisteme mecanice, modele clasice, volumul I, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.
44. Gabriela Ţiţeica şi Al.Stoenescu - Probleme de calcul vectorial, Bucureşti, 1941.
45. Gabriela Ţiţeica - Probleme de mecanică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1977.
46. V.Vâlcovici - Curs de mecanică, vol.I (Statica, Dinamica punctului şi a sistemelor), Fac. de Mecanică şi Fizică, Bucureşti, 1958.
47. V.Vâlcovici şi colab. - Mecanica teoretică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1959, 1968.
48. R.Voinaroski - Mecanica teoretică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968.
49. R.Voinea şi colab. - Probleme de mecanică, vol.1,2, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
50. R.Voinea, D.Voiculescu, V.Ceauşu - Mecanica, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ BUCUREŞTI

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Bun de tipar 23II-1987 Apărut Martie 1987

Tiraj 266 Coli tipar (Fasc.) 20

Tipar executat sub comanda nr. 236
Tipografia Universității București

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ
BIBLIOTECA
de
MATEMATICĂ
BUCUREȘTI

VERIFICAT
1987

VERIFICAT
2007

VERIFICAT
2007

VERIFICAT
2017

C.M.U.B. Rmf 30/10-4.'87

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Lei 48,95

https://bibliotecă-digitala.ro / https://unibuc.ro